3 Schwingungstechnik

Mechanische Schwingungen treten in der Fahrzeugtechnik in vielfältiger Weise auf. In der weit überwiegenden Anzahl handelt es sich dabei um unerwünschte Störungen, die es zu minimieren gilt. In bestimmten Fällen sind Schwingungsphänomene aber auch geeignet, den Fahrzeugcharakter zu unterstreichen. So wäre es z.B. nicht zielführend, alle fahrbahnerregten Schwingungen durch das Fahrwerk vollständig auszufiltern, da damit auch der gewünschte Fahrbahnkontakt verloren ginge.

Tieffrequente Schwingungen bis ca. 50 Hz werden vom Menschen bei körperlichem Kontakt mit dem Schwingungssystem unmittelbar als Vibration wahrgenommen, während höherfrequente Schwingungen bis ca. 1 KHz als Körperschall von Bedeutung sind. Für die menschliche Wahrnehmung spielt dieser nur dann eine Rolle, wenn durch ihn Luftschall angeregt wird, der anschließend auch vom Ohr wahrgenommen wird. Während das subjektive Wahrnehmungsempfinden sowohl für Schwingungen (Kapitel 3.5) als auch für akustische Phänomene gut geklärt ist (Kapitel 7), ist das subjektive Empfinden der Kombination von Schall- und Vibrationseinwirkung noch vielfach ungeklärt. Einerseits können sich die Einzelereignisse gegenseitig maskieren, andererseits aber auch verstärken. So ist beispielsweise bekannt, dass der Soliditätseindruck beim Überfahren von Hindernissen wesentlich stärker leidet, wenn zu dem Nachschwingen des Fahrzeugs auch noch ein korrelierter akustischer Effekt (Achspoltern) hinzukommt. Ähnliches gilt für Klapper- und Knarzphänomene in Verbindung mit einem Fahrzeug, das zu Zitterschwingungen neigt.

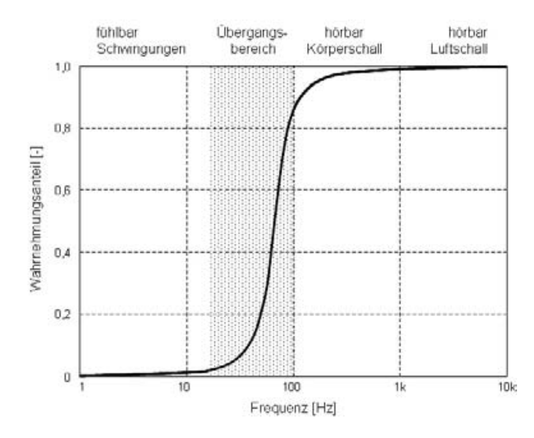


Bild 3-1: Vibroakustische Wahrnehmungsbereiche (schematisch)

Schwingende Zustandsgrößen sind dabei Wege, Winkel, Kräfte, Momente, usw. Nach der Art der Beanspruchung lassen sich Längs-, Torsions-, Biegeschwingungen, usw. unterscheiden. Nach der Art der Anregung kann man zwischen freien Schwingungen und erzwungenen Schwingungen differenzieren.

Zur Reduzierung von unerwünschten Schwingungen können diese isoliert, gedämpft oder getilgt werden. Jede Methode zeigt die gewünschte Wirkung normalerweise nur in bestimmten Frequenzbereichen. Außerhalb dieser Bereiche ist unter Umständen sogar mit einer Verstärkung der Schwingungen zu rechnen. Die erfolgreiche Anwendung der Methoden zur Reduktion von Schwingungen setzt daher die genaue Analyse des Schwingungssystems voraus. Dazu werden die nachstehend behandelten Schwingungssysteme mathematisch vereinfachend als lineare Schwingungssysteme aus konzentrierten Elementen mit konstanten Koeffizienten beschrieben. Diese Näherung ist für die quantitative Anylse nicht uneingeschränkt zulässig, für qualitative Betrachtungen jedoch meist ausreichend.

3.1 Freie Schwingungen elementarer Systeme

3.1.1 Einmassenschwinger

Bei freien Schwingungen wird das System nach einer einmaligen Anregung sich selbst überlassen und kommt durch die immer vorhandene Dämpfung im Rahmen eines Einschwingvorganges zur Ruhe. Die Dämpfung kann verschiedene Ursachen haben wie Reibung, innere Materialdämpfung, usw. Am einfachsten lässt sich die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung (viskose Dämpfung) mathematisch behandeln. Da diese auch die größte praktische Bedeutung besitzt, wird nachstehend nur dieser Fall betrachtet. Das entsprechende Schwingungssystem mit einem Freiheitsgrad und den Parametern Masse m, Dämpfungskonstante d und Federkonstante c ist in **Bild 3-2** dargestellt.

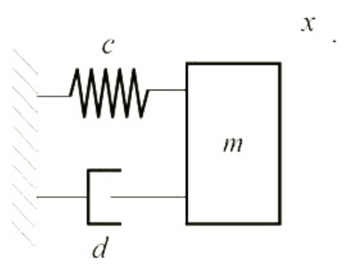


Bild 3-2: Einmassenschwinger mit viskoser Dämpfung

Die Schwingungs-Differentialgleichung für obiges System lautet:

$$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + c \cdot x = 0$$

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

mit der Abklingkonstante

$$\delta = \frac{d}{2 \cdot m}$$

und der Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Mit der Transformation

$$\tau = \omega_0 \cdot t$$

$$\frac{dx}{d\tau} = x'$$

ergibt sich die nachstehende vereinfachte Form der Differentialgleichung, die nur noch vom sogenannten Lehr'schen Dämpfungsmaß[1] D abhängig ist:

$$x'' + 2 \cdot D \cdot x' + x = 0$$

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{d}{2 \cdot \sqrt{c \cdot m}}$$

Bei der Lösung der Differentialgleichung sind in Abhängigkeit vom Wert des Dämpfungsmaßes drei Fälle zu unterscheiden:

- Schwach gedämpfte Schwingung mit $D < 1$:

  $$x(t) = e^{-D\omega_0 t}\left(A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t\right)$$

  mit der Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung

  $$\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$$

- Stark gedämpfte Schwingung mit $D > 1$:

  $$x(t) = A_1 e^{\left(-D + \sqrt{D^2 - 1}\right)\omega_0 t} + A_2 e^{\left(-D - \sqrt{D^2 - 1}\right)\omega_0 t}$$

- Aperiodischer Grenzfall mit $D = 1$:

  $$x(t) = \left(A_1 + A_2 x_0 t\right) e^{-\omega_0 t}$$

Aus den Anfangsbedingungen eines außerhalb der Ruhelage befindlichen Systems mit

$$x(t = 0) = x_0; \; \dot{x}(t = 0) = v_0$$

errechnen sich die Faktoren A, B, A_1, A_2 wie folgt:

$$A = A_1 = x_0$$

$$A_2 = \frac{v_0}{\omega_0} + x_0$$

$$B = \frac{v_0}{\omega_D} + \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}} \cdot x_0$$

Der Einmassenschwinger soll nun durch einen Impuls mit der Dauer T_i und der konstanten Kraft F angeregt werden. Die Dauer des Impulses sei wesentlich kleiner als die Periodendauer T. In diesem Fall lässt sich mit Hilfe des Impulssatzes die Anfangsgeschwindigkeit berechen:

$$v_0 = \frac{F \cdot T_i}{m}$$

In **Bild 3-3** ist das Einschwingverhalten bei statischer Auslenkung ($x \neq 0; \; \dot{x} = 0$) und in **Bild 3-4** bei dynamischer Anregung ($x = 0; \; \dot{x} \neq 0$), jeweils für den aperiodischen Grenzfall und für den schwach gedämpften Fall, dargestellt.

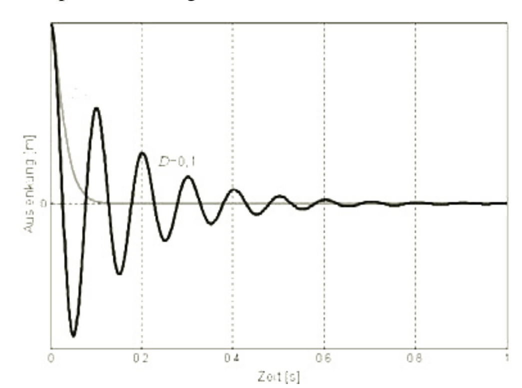


Bild 3-3: Einschwingvorgang des Einmassenschwingers bei statischer Auslenkung mit $x_0 \neq 0$ und $v_0 = 0$

Als Gütekriterium für das Einschwingverhalten wird oft die quadratische Abweichung von der Ruhelage angesetzt:

$$\varepsilon^2 = \int_0^\infty x(t)^2 \, dt \rightarrow Minimum \succ D = 1/\sqrt{2}$$

[1] auch Dämpfungsgrad genannt

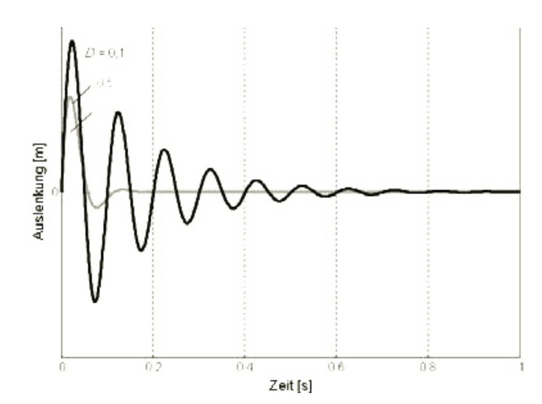


Bild 3-4: Einschwingvorgang des Einmassenschwingers bei Impulsanregung mit $x_0 = 0$ und $v_0 \neq 0$

Für günstiges Einschwingverhalten wählt man für das Dämpfungsmaß Werte zwischen $D = 1$ (aperiodischer Grenzfall) und $D = 1/\sqrt{2}$ (minimales Flächenquadrat).

3.1.2 Ungefesselter Zweimassenschwinger

Beim ungefesselten Zweimassenschwinger sind die zwei frei in x-Richtung beweglichen Massen m_1 und m_2 durch eine Feder und einen Dämpfer verbunden **(Bild 3-5)**.

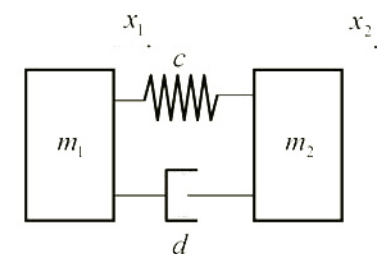


Bild 3-5: Ungefesselter Zweimassenschwinger

Für den ungefesselten Zweimassenschwinger gelten zwei unabhängige Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + d \cdot \Delta\dot{x} + c \cdot \Delta x = 0$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 - d \cdot \Delta\dot{x} - c \cdot \Delta x = 0$$

$$\Delta x = x_1 - x_2$$

In Matrixschreibweise lassen sich diese Gleichungen zusammenfassen:

$$[M] \cdot \ddot{\vec{x}} + [D] \cdot \dot{\vec{x}} + [C] \cdot \vec{x} = 0$$

mit

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$ Massenmatrix

$$[D] = \begin{bmatrix} d & -d \\ -d & d \end{bmatrix}$$ Dämpfungsmatrix

$$[C] = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}$$ Steifigkeitsmatrix

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$ Freiheitsgrade

Die Lösungen der Differentialgleichung ergeben sich analog zum Einmassen-Schwinger. Beispielsweise gilt für den schwach gedämpften Fall:

$$\vec{x}(t) = e^{-D\omega_0 t} \left(\vec{A} \cos \omega_D t + \vec{B} \sin \omega_D t \right)$$

mit

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m_{12}}$$

$$m_{12} = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

D.h. die wirksame Masse m_{12} ist kleiner als die kleinere der beiden Massen m_1 und m_2. Damit liegt die Schwingfrequenz oberhalb derjenigen Frequenz, die ein gefesselter Einmassenschwinger mit der kleineren der beiden Massen besitzt.

Ein Fahrzeug verhält sich beispielsweise in seinem längsdynamischen Schwingungsverhalten näherungsweise wie ein ungefesselter Zweimassenschwinger mit der Torsionssteifigkeit des Triebstrangs als Feder sowie den Trägheiten von Motor und Fahrzeug auf jeder Seite (Kapitel 4.3.2).

3.1.3 Gekoppelte Schwingsysteme

In der automobilen Praxis liegen häufig gekoppelte Schwingsysteme vor, die u.U. sehr unangenehme Koppelschwingungen verursachen können. Beispiele dafür sind das elastisch gelagerte Kühlmodul im Schwingsystem Karosserie oder der elastisch gelagerte Motor im gefederten Fahrzeugaufbau (Kapitel 4). Auch die in Kapitel 3.3.6 behandelte Schwingungstilgung stellt einen Anwendungsfall des Themas gekoppelte Schwingungssysteme dar. In allen diesen Fällen ist eine gezielte Abstimmung der gekoppelten Systeme erforderlich, um das gewünschte Schwingungsverhalten im Fahrzeug zu erzielen.

Einen einfachen Fall eines gekoppelten Schwingsystems stellt die Kopplung von zwei Einmassenschwingern gemäß **Bild 3-6** dar.

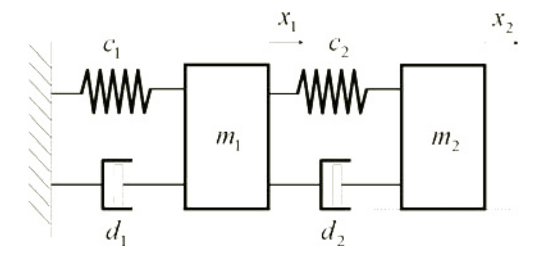


Bild 3-6: Gekoppeltes Schwingsystem mit zwei Freiheitsgraden

Mit Hilfe des Prinzips von d'Alembert können die Bewegungsgleichungen der beiden Massen in Abhängigkeit von den zwei Freiheitsgraden x_1 und x_2 ermittelt werden. Betrachtet man nur den ungedämpften Schwingfall, so ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entsprechend der Anzahl der Freiheitsgrade erhält man für das gekoppelte Schwingsystem auch zwei Eigenmoden mit den zugehörigen Eigenfrequenzen ω_{01} und ω_{02}. Diese lassen sich aus den Abstimmfrequenzen ω_1 und ω_2 der ungekoppelten Einmassenschwinger wie folgt bestimmen:

$$\left(\frac{\omega_{01,02}}{\omega_2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)$$

mit

$$a = 1 + \frac{m_2}{m_1} + b$$

$$b = \frac{c_1 \cdot m_2}{m_1 \cdot c_2} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2$$

Jeder Eigenmode ist neben der zugehörigen Eigenfrequenz ω_i auch durch das Amplitudenverhältnis μ_i der schwingenden Massen gekennzeichnet. Es lässt sich aus den Bewegungsgleichungen durch Einsetzen der Eigenfrequenzen ermitteln:

$$\mu_{01,02} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{c_1 + c_2 - m_1 \cdot \omega_{01,02}^2}{c_2}$$

$$\mu_{01,02}^{-1} = 1 - \left(\frac{\omega_{01,02}}{\omega_2}\right)^2$$

Setzt man den Bezugswert willkürlich zu x_1=1, so kann man das Amplitudenverhältnis einer Eigenmode auch in Form des Eigenvektors $\vec{\phi}_i$ darstellen. Die Gesamtheit der Eigenvektoren bildet die Modalmatrix:

$$[\phi] = \begin{pmatrix} \mu_{01} & \mu_{02} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ein positiver Wert für das Amplitudenverhältnis signalisiert eine Schwingform mit gleichphasig schwingenden Massen, während ein negativer Wert eine Schwingform mit gegenphasig schwingenden Massen kennzeichnet.

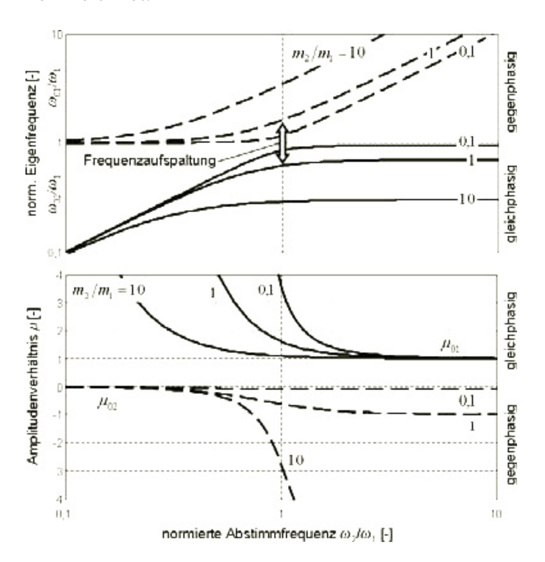


Bild 3-7: Aufspaltung der Eigenfrequenzen des gekoppelten Schwingsystems nach **Bild 3-6**

Charakteristisch für alle gekoppelten Schwingsysteme ist die Aufspaltung der Eigenfrequenzen. Bei sehr weich abgestimmtem System 2 ($\omega_2/\omega_1 \ll 1$) schwingen beide Systeme weitgehend entkoppelt, die beiden Eigenfrequenzen entsprechen den Abstimmfrequenzen der jeweiligen Einmassenschwinger. Nähern sich die beiden Abstimmfrequenzen an, so kommt es zu der in **Bild 3-7** gut sichtbaren Frequenzaufspaltung. Dabei wird abhängig vom Masseverhältnis m_2/m_1 die Frequenz der höherfrequenten gegenphasigen Schwingform ω_{01} angehoben, während die Frequenz ω_{02} der tieferfrequenten gleichphasigen Schwingform abgesenkt wird. Selbst bei exakt gleichen Schwingfrequenzen der beiden Einmassenschwinger ($\omega_2/\omega_1 = 1$) ist eine resultierende Aufspaltung zu verzeichnen:

$$\left(\frac{\omega_{01,02}}{\omega_2}\right)^2_{\omega 2=\omega 1} = 1 + \frac{m_2}{2m_1} \pm \sqrt{\left(\frac{m_2}{2m_1}\right)^2 + \frac{m_2}{m_1}}$$

Dieser Spezialfall ist für die Schwingungstilgung wesentlich und wird in Kapitel 3.3.6 weiter vertieft. Als Konsequenz der Frequenzaufspaltung ist beispielsweise bei der Modalanalyse von gekoppelten Systemen zu beachten, dass dort nur die entsprechend verschobenen Eigenschwingfrequenzen zu beobachten sind (Kapitel 16.5).

3.2 Erzwungene Schwingungen elementarer Systeme

3.2.1 Einmassenschwinger

Wird dem Schwingungssystem permanent Schwingungsenergie zugeführt, so bleibt die Schwingung dauerhaft erhalten. Die Schwingungsdifferentialgleichung des Einmassenschwingers von **Bild 3-2** unter externer *Kraftanregung* vertikal auf die Masse m lautet damit:

$$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + c \cdot x = F(t)$$

Für den Fall einer harmonischen Anregung mit der Kreisfrequenz ω

$$F(t) = \hat{F} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

ergibt sich unter der Annahme linearer Systeme auch eine sinusförmige Antwortfunktion. Das Systemverhalten kann in diesem Fall vorteilhaft mit Hilfe der elektromechanischen Analogie im Frequenzbereich betrachtet werden. Für die Übertragungsfunktion in Form der dynamischen Nachgiebigkeit ergibt sich nach Kapitel 2.2.3:

$$N = \frac{x(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{n}{-\omega^2 \cdot n \cdot m + j \cdot \omega \cdot n \cdot d + 1}$$

Normiert man nun noch die Frequenz ω auf die Eigenschwingfrequenz ω_0

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{n \cdot m}$$

so erhält man für den Amplitudengang den Ausdruck:

$$\left| \frac{x}{F} \right| = n \cdot V_1$$

Die Vergrößerungsfunktion V_1 ist nur abhängig von der dimensionslosen normierten Frequenz η und dem in Kapitel 3.1.1 bereits eingeführten dimensionslosen Dämpfungsmaß D:

$$V_1 = \left| \frac{x(\omega)}{x(0)} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

Tabelle 3-1 zeigt den typischen resonanzhaften Verlauf von V_1. Im unterkritischen Bereich bei kleinen Frequenzen ist die Auslenkung nur durch die Federsteifigkeit bestimmt. Im Bereich der Resonanz steigt die Auslenkung mit abnehmendem Dämpfungsmaß stark an:

$$V_{1\max} \approx \frac{1}{2D} \qquad \text{für } D < 0{,}3$$

Bei hohen Frequenzen geht die Auslenkung aufgrund der Massenträgheit gegen Null.

Bei *Weganregung* am Fußpunkt des Schwingers mit der harmonischen Auslenkung

$$u = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

ergibt sich die Vergrößerungsfunktion

$$V_2 = \left| \frac{x}{u} \right| = \frac{\sqrt{1+(2D\eta)^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

Der wesenliche Unterschied der Vergrößerungsfunktionen V_2 liegt im Vergleich zu V_1 in dem Sachverhalt, dass alle Kurvenzüge durch den Punkt $\eta = \sqrt{2}$ gehen und sich bei höheren Frequenzen die Amplitudenverhältnisse bei V_2 im Vergleich zu V_1 umkehren **(Tabelle 3-1)**. Zunehmende Dämpfung führt also bei hohen Frequenzen aufgrund der damit einhergehenden Verhärtung des Dämpfers zu größer werdenden Amplituden. Dieser Sachverhalt ist insbesondere für die Schwingungsisolation von Bedeutung und wird in Kapitel 3.3.2 noch näher betrachtet werden.

Unwuchtanregung ergibt sich bei rotierenden Bauteilen aus der Unwucht U der drehenden Massen. Diese entsteht, wenn die Drehachse eines Rotors nicht durch den Massenschwerpunkt verläuft. Sie errechnet sich aus der Unwuchtmasse m_u und dem Abstand s der Unwuchtmasse von der Drehachse. Durch die Unwuchtmasse wird eine Verlagerung des Massenschwerpunktes S verursacht. Diese Verlagerung wird Exzentrizität ε genannt:

$$U = m_u \cdot s \approx m \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = s \cdot \frac{m_u}{m + m_u}$$

Die Unwucht verursacht eine umlaufende Unwuchtkraft F_u, deren Betrag mit dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ω des Rotors ansteigt:

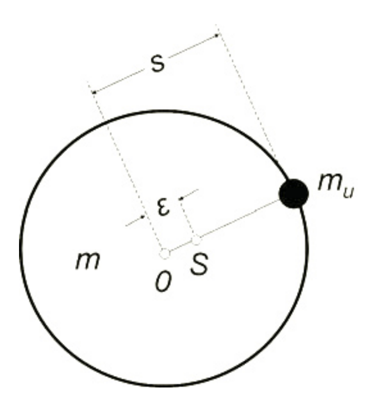


Bild 3-8: Rotor mit Unwuchtmasse

$$F_u = U \cdot \omega^2$$

Die umlaufende Unwuchtkraft führt bei einer stationär umlaufenden Welle mit der Nachgiebigkeit n zur Durchbiegung w des Wellenmittelpunktes. Bezieht man diese Durchbiegung auf die Exzentrizität, so erhält man die Vergrößerungsfunktion V_3:

$$V_3 = \left|\frac{w}{\varepsilon}\right| = \frac{\eta^2}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

V_3 geht für kleine Frequenzen gegen Null, da in diesem Fall die Kraft aus der Unwuchtanregung verschwindet. Für hohe Frequenzen stellt sich eine konstante Amplitude ein, die nur von der Exzentrizität abhängt. Im Resonanzbereich verhält sich diese Funktion analog zu den vorhergehenden Vergrößerungsfunktionen (**Tabelle 3-1**). Man erkennt unschwer, dass die Durchbiegung einer rotierenden Welle im Resonanzbereich bei niedriger Dämpfung sehr groß wird. Dieser Zustand muss daher vermieden, oder sehr schnell durchfahren werden. Ein sicherer Betrieb ist nur unterkritisch ($\eta < 1$) oder überkritisch ($\eta > 1$) möglich.

In der Richtlinie VDI 2060 werden zulässige Restunwuchten in Form der Schwerpunktsgeschwindigkeit

$$v_s = \varepsilon \cdot \omega$$

für die Gütegruppen Q0.4 bis Q40 festgelegt, mit den zugehörigen Restunwuchten $v_s < 0{,}4 mm/s$ bis $v_s < 40 mm/s$. Für Autoräder, Felgen und Radsätze ist dort z.B. die Gütegruppe Q40 festgelegt, während für Gelenkwellen Gütegruppe Q6.3 bis Q16 maßgebend sind.

Unwuchtanregung ist beispielsweise auch bei einem Verbrennungsmotor mit unausgeglichenen oszillierenden Massen gegeben. Da Motorlager relativ weich ausgelegt werden, ergibt sich aufgrund der oszillierenden Massenkräfte im überkritischen Betriebsbereich eine konstante Schwingungsamplitude des Motors in Richtung der Zylinderachse und damit auch ein näherungsweise drehzahlunabhängiger Körperschalleintrag über die Motorlager (Kapitel 9.6.1).

3.2.2 Zweimassenschwinger

Um das Verhalten bei erzwungenen Schwingungen zu analysieren, wird die Bewegungsgleichung für das gekoppelte Schwingsystem nach Kapitel 3.1.3 um den Anregungsvektor aus den anregenden harmonischen Kräften F_1 und F_2 an den Massen m_1 und m_2 erweitert:

$$\begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

Der Übergang in den Frequenzbereich wird vollzogen, indem die Differentiation durch den Laplace-Operator $s=j\omega$ ersetzt wird. Damit ergibt sich unter Berücksichtigung der viskosen Dämpfung die folgende verallgemeinerte Form:

$$\left(s^2 \cdot [M] + s \cdot [D] + [C]\right) \cdot \vec{x} = \vec{F}$$

Diese Gleichung kann durch die Einführung der dynamischen Steifigkeitsmatrix [Z] weiter vereinfacht werden:

$$[Z] \cdot \vec{x} = \vec{F}$$

Ersetzt man die dynamische Steifigkeitsmatrix durch die Matrix der dynamischen Nachgiebigkeit $[Y]=[Z]^{-1}$, so ergibt sich die Form:

$$[Y] \cdot \vec{F} = \vec{x}$$

Für die Definition der Matrixelemente gelten jeweils unterschiedliche Randbedingungen:

$$Z_{ij} = \left.\frac{F_i}{x_j}\right|_{x_k=0} \; ; \qquad k \neq j$$

$$Y_{ij} = \left.\frac{x_i}{F_j}\right|_{F_k=0} \; ; \qquad k \neq j$$

Im Fall der Steifigkeitsmatrix werden bei der Definition der Matrixelemente die Verschiebungen x_k aller Bewegungs-Freiheitsgrade[2] mit Ausnahme des jeweiligen Anregungspunktes zu Null gesetzt, während bei der Nachgiebigkeitsmatrix jeweils alle Freiheitsgrade erhalten bleiben. Durch diese Reduktion der Freiheitsgrade ist die Steifigkeitsmatrix besonders gut geeignet, um die Koeffizienten rechnerisch zu bestimmen, während für die experimentelle Identifikation der Matrizen eines Mehrfreiheitsgradsystems nur die Elemente der Nachgiebigkeitsmatrix direkt aus der Messung der Nachgiebigkeiten an den einzelnen Knotenpunkten bestimmt werden können. Dazu

[2] Im englischen Sprachraum: Degree of Freedom (DoF)

wird das frei schwingende System an den jeweiligen Knotenpunkten mit einem Shaker oder dem Impulshammer angeregt (Kapitel 16.3.2).

Sind die Matrixkoeffizienten bekannt, so kann daraus das Übertragungsverhalten bestimmt werden. Für den Fall einer harmonischen Anregung durch nur eine Kraft F_1 auf die Masse m_1 des Zweimassenschwingers, d.h. $F_2 = 0$, errechnet sich z.B. die nachstehende Übertragungsfunktion:

$$\frac{x_1}{F_1} = Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\det(Z)} = \frac{1}{Z_{11} - Z_{12} \cdot Z_{21} \cdot Z_{22}^{-1}}$$

In Kapitel 3.3.1 (elastische Lagerung) und in Kapitel 3.3.6 (Schwingungstilgung) wird das Übertragungsverhalten des *gefesselten* Zweimassenschwingers weiter analysiert. Nachstehend soll der *ungefesselte* Zweimassenschwinger näher betrachtet werden. Dazu eliminiert man die Anbindung der Masse m_1 an das Fundament, d.h. es gilt für die Parameter

$$c_1 = d_1 = 0$$

und

$$c_2 = 1/n;\; d_2 = d\;.$$

Damit ergeben sich folgende Übertragungsfunktionen:

$$\frac{\ddot{x}_1}{F_1} = \frac{1}{(m_1 + m_2)} \cdot \frac{1 + s \cdot n \cdot d + s^2 \cdot m_2 \cdot n}{1 + s \cdot n \cdot d + s^2 \cdot m_{ges} \cdot n}$$

$$\left|\frac{\ddot{x}_1}{F_1}\right| = \frac{1}{m_1 + m_2} \cdot V_4$$

$$\left|\frac{x_1(\omega)}{x_1(0)}\right| = V_4$$

mit der Vergrößerungsfunktion

$$V_4 = \frac{\sqrt{\left(1 - \eta^2/\lambda^2\right)^2 + 4D^2\eta^2}}{\sqrt{\left(1 - \eta^2\right)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\lambda = \frac{\omega_T}{\omega_0}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{m_{ges} \cdot n} > \frac{1}{m_2 \cdot n} = \omega_T^2$$

$$m_{ges} = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

Die Vergrößerungsfunktion V_4 besitzt nicht nur bei der Frequenz ω_0 eine Polstelle, wie die vorstehenden Vergrößerungsfunktionen der Einmassenschwinger auch, sondern zusätzlich noch eine Nullstelle bei der Tilgungsfrequenz ω_T (**Tabelle 3-1**). Diese ergibt sich aus dem Sachverhalt, dass das Schwingsystem mit der Masse m_2 und der Nachgiebigkeit n bei der Tilgungsfrequenz gerade gegenphasig zur Anregung an der Masse m_1 schwingt, was im ungedämpften Fall die Nachgiebigkeit am Anregungspunkt zu Null werden lässt.

Das Schwingverhalten der Masse m_2 kann beim ungefesselten Zweimassenschwinger durch die bereits vom Einmassenschwinger bekannte Vergrößerungsfunktion V_2 wie folgt charakterisiert werden:

$$\frac{x_2}{F_1} = Y_{21} = \frac{Z_{21}}{\det(Z)}$$

$$\frac{\ddot{x}_2}{F_1} = \frac{1}{(m_1 + m_2)} \cdot \frac{1 + s \cdot n \cdot d}{1 + s \cdot n \cdot d + s^2 \cdot m_{ges} \cdot n}$$

$$\left|\frac{\ddot{x}_2}{F_1}\right| = \frac{1}{(m_1 + m_2)} \cdot V_2\left(m_{ges}, d, n\right)$$

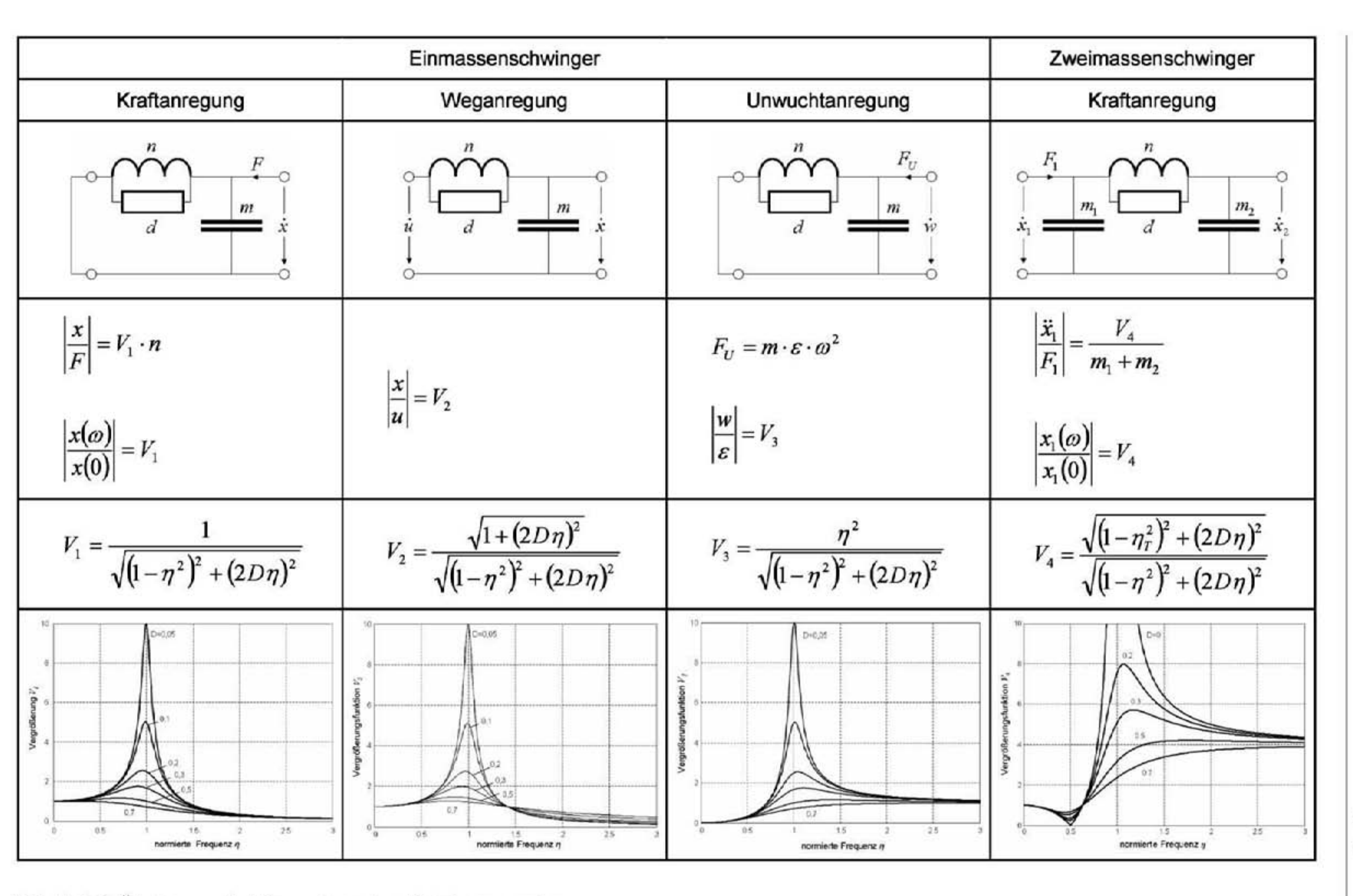
$$\left|\frac{x_2(\omega)}{x_2(0)}\right| = V_2\left(m_{ges}, d, n\right)$$

3.3 Passive Schwingungsauslegung

Bei der schwingungstechnischen Auslegung von Fahrzeugen können mehrere grundsätzlich unterschiedliche Ansatzpunkte verfolgt werden:

- Vermeidung von Anregungen
- Verschiebung von Resonanzlagen
- Schwingungstilgung
- Schwingungsisolation
- Schwingungsdämpfung

Wenn möglich, sollte der Vermeidung von Anregungen der Vorrang vor der Bekämpfung von Symptomen eingeräumt werden. Als Beispiel sei die Vermeidung von Massenkräften durch Ausgleichswellen bei Motoren ohne vollständigen Massenausgleich genannt (Kapitel 9.3). Lassen sich die Anregungen nicht vermeiden, so kann es Erfolg versprechend sein, Resonanzfrequenzen zu verschieben, um ungünstige Kombinationen des Anregungsspektrums mit dem Amplitudengang der Übertragungsfunktion zu vermeiden. Hier können Steifigkeiten oder Massen von Bauelementen variiert werden, die an der Schwingungsübertragung beteiligt sind. Ein Beispiel dafür ist die Verkämmung der Leerlaufdrehzahl des Antriebsaggregates mit den Strukturresonanzen der Karosserie (Kapitel 4.3.1). Auch die Tilgung von resonanzhaften Schwingungsphänomenen durch Applizieren eines entsprechend abgestimmten zusätzlichen Schwingungssystems auf der zu beruhigenden Masse wird sehr häufig erfolgreich praktiziert (Kapitel 3.3.6). So werden z.B. Lenkradtilger zur Reduktion von Lenkradschwingungen eingesetzt. Durch elastische Lage-



Einmassenschwinger			Zweimassenschwinger
Kraftanregung	Weganregung	Unwuchtanregung	Kraftanregung
$\left\lvert\frac{x}{F}\right\rvert = V_1 \cdot n$ $\left\lvert\frac{x(\omega)}{x(0)}\right\rvert = V_1$	$\left\lvert\frac{x}{u}\right\rvert = V_2$	$F_U = m \cdot \varepsilon \cdot \omega^2$ $\left\lvert\frac{w}{\varepsilon}\right\rvert = V_3$	$\left\lvert\frac{\ddot{x}_1}{F_1}\right\rvert = \frac{V_4}{m_1 + m_2}$ $\left\lvert\frac{x_1(\omega)}{x_1(0)}\right\rvert = V_4$
$V_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$	$V_2 = \frac{\sqrt{1+(2D\eta)^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$	$V_3 = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$	$V_4 = \frac{\sqrt{(1-\eta_T^2)^2 + (2D\eta)^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$

Tabelle 3-1: Übertragungsfunktionen elementarer Schwingungssysteme

rung kann die erregende Quelle vom übrigen System isoliert werden. Ein prominentes Beispiel dafür ist die elastische Lagerung des Verbrennungsmotors (Kapitel 9.6.1). Beim schaltbaren Motorlager wird dabei zusätzlich hydraulische Dämpfung eingesetzt (Kapitel 3.3.3), um die großen Amplituden im Bereich der Resonanz zu begrenzen.

3.3.1 Elastische Lagerung

Bei der Isolierung von Schwingungen und Körperschall kann entweder die anregende Schallquelle schwingungstechnisch von der Umgebung getrennt, oder der Empfänger von den störenden Schwingungen isoliert werden. Beides wird in der Regel durch elastische Lagerung erreicht. Ein Beispiel für die Isolation der Schwingungsquelle im Automobil stellt z.B. die Motorlagerung dar, während die Sitzisolation den Insassen von den Schwingungen im Fahrzeug entkoppelt.

Bei der *einfach elastischen Lagerung* wird die erregende Quelle mittels einer zwischengeschalteten Lagerebene mit Hilfe der elastischen Isolierelemente vom restlichen System entkoppelt. Dabei kann man die erregende Quelle als Masse betrachten, auf die eine Erregerkraft einwirkt, wie dies beispielsweise bei einer drehenden Maschine durch unausgeglichene Massen oder bei einem Verbrennungsmotor durch die zyklischen Drehmoment-Schwankungen gegeben ist.

Damit liegt ein Einmassenschwinger wie in Kapitel 3.2.1 vor. Im Gegensatz zu der dort angestellten Betrachtung soll nun die Vergrößerungsfunktion als Verhältnis der auf das Fundament übertragenen Kraft F_a zu der anregenden Kraft F_e ermittelt werden. Wie nachstehende Gleichung zeigt, ist diese Vergrößerungsfunktion V_{EEL} identisch zu derjenigen bei harmonischer Weganregung nach Kapitel 3.2.1:

$$\left|\frac{F_a}{F_e}\right| = \frac{\sqrt{1+4D^2\eta^2}}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+4D^2\eta^2}} = V_{EEL} = V_2$$

Die normierte Frequenz η ist dabei das Verhältnis von Anregungsfrequenz ω zu Abstimmfrequenz ω_0 und wird auch Abstimmverhältnis genannt.

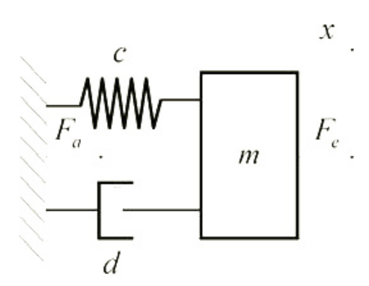


Bild 3-9: Einmassenschwinger als Modell der einfach elastischen Lagerung

Wie **Bild 3-10** zeigt, besitzt diese Anordnung erst im überkritischen Bereich oberhalb der $\sqrt{2}$ -fachen Abstimmfrequenz eine Isolationswirkung. Diese kann folgendermaßen definiert werden:

$$I = 1 - V_2 = 1 - \left|\frac{F_a}{F_e}\right|; \ \eta \geq \sqrt{2}$$

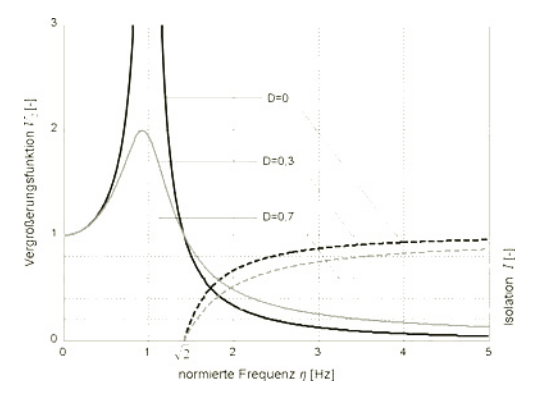


Bild 3-10: Isolationsverhalten bei einfach elastischer Lagerung für verschiedene Dämpfungsmaße

Die Isolation I nimmt mit größer werdendem Abstimmverhältnis zu. Bei einer gegebenen Anregungsfrequenz bedeutet dies, dass für gute Isolation eine möglichst niedrige Abstimmfrequenz zu wählen ist. Das Bild zeigt ebenfalls, dass mit zunehmender Dämpfung zwar die Amplitude im Resonanzbereich wirkungsvoll begrenzt aber gleichzeitig auch die Isolationswirkung im überkritischen Bereich beeinträchtigt wird. Bei der Auslegung von Isolationselementen muss daher immer ein Kompromiss zwischen der im Resonanzfall tolerierbaren Maximalamplitude und der notwendigen Isolation gefunden werden.

Wird die Isolation in Prozent angegeben, so spricht man auch vom Isolationswirkungsgrad. An Stelle der Isolation I wird in der Praxis häufig die Pegeldifferenz

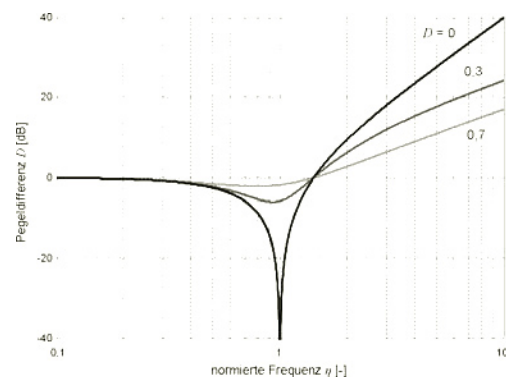


Bild 3-11: Pegeldifferenz einer einfach elastischen Lagerung für verschiedene Dämpfungsmaße

D in dB zwischen dem Schwingungspegel am Eingang und am Ausgang angegeben. Der Zusammenhang zwischen diesen Größen ergibt sich wie folgt:

$$D = L_e - L_a = 20\lg\left(\frac{1}{V_2}\right)$$

Beispiele für die elastische Lagerung im Kraftfahrzeug stellt z.B. die Aufhängung der Abgasanlage an der Karosserie über elastische Gummielemente oder die elastische Lagerung des Antriebsaggregates im Motorträger dar.

Bei der *doppelt elastischen Lagerung* wird die Masse, auf welche die anregende Kraft einwirkt, durch eine Zwischenmasse und zwei federnde Lagerelemente vom Fundament isoliert **(Bild 3-12)**.

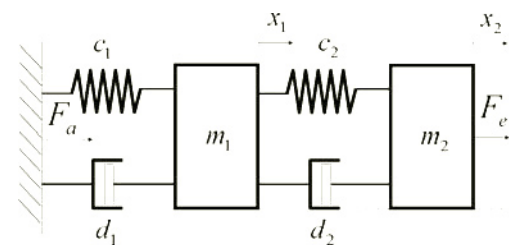


Bild 3-12: Prinzip der doppelt elastischen Lagerung

Da die doppelt elastische Lagerung mit der Struktur des gekoppelten Schwingsystems von Kapitel 3.1.3. übereinstimmt, kann die Vergrößerungsfunktion unter Vernachlässigung der Dämpfung mit Hilfe der dort angegebenen Eigenschwingfrequenzen ω_{01} und ω_{02} des gekoppelten Systems formuliert werden:

$$\left|\frac{F_a}{F_e}\right| = V_{DEL} = \frac{1}{\left|\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{01}}\right)^2\right]\cdot\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{02}}\right)^2\right]\right|}$$

mit

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_1}$$

gilt auch:

$$V_{DEL} = \frac{1}{\left|\left(1-\eta^2\right)\cdot\left(1-\eta^2\frac{m_2 n_2}{m_1 n_1}\right)-\eta^2\frac{n_2}{n_1}\right|}$$

Die Abstimmfrequenzen ω_{01} und ω_{02} liegen aufgrund der Frequenzaufspaltung (Kapitel 3.1.3.) unterhalb bzw. oberhalb der Resonanzfrequenzen ω_1 und ω_2 der ungekoppelten Einzelschwinger. Aus **Bild 3-13** ist auch zu ersehen, dass die Pegeldifferenz bei der doppelt elastischen Lagerung oberhalb der höherliegenden Abstimmfrequenz im Vergleich zur einfach elastischen Lagerung doppelt so steil ansteigt und damit Vorteile bei der Isolation besitzt. Nachteilig ist jedoch

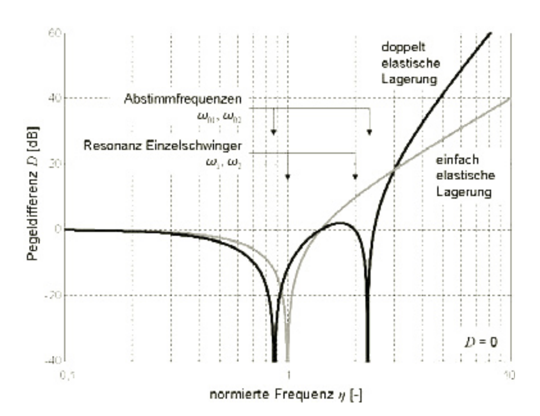


Bild 3-13: Pegeldifferenz der einfach elastischen Lagerung und der doppelt elastischen Lagerung im Vergleich für $m_2/m_1 = 1$ und $n_2/n_1 = 0{,}25$

im Vergleich zur einfach elastischen Lagerung der zusätzliche Dämmungseinbruch im Bereich der oberen Abstimmfrequenz.

Aufgrund der Isolationsvorteile im höherfrequenten Bereich werden doppelt elastische Lagerungen im Automobilbau in erster Linie verwendet, um höherfrequenten Körperschall wirkungsvoll zu isolieren. Eine derartige Konfiguration findet sich z.B. bei Abgasanlagenaufhängungen mit einvulkanisierter Zwischenmasse. Sie liegt aber auch in einem Triebstrang vor, bei dem das Hinterachsgetriebe (HAG) über elastische Lager (HAG-L) im Hinterachsträger (HAT) als Zwischenmasse gelagert ist, während dieser seinerseits mit Hilfe der Hinterachsträgerlager (HAT-L) elastisch mit der Karosserie verbunden wird. Hochfrequente Verzahnungsgeräusche aus dem Getriebe sind in diesem Fall doppelt elastisch gegen die Karosserie isoliert **(Bild 3-14)**.

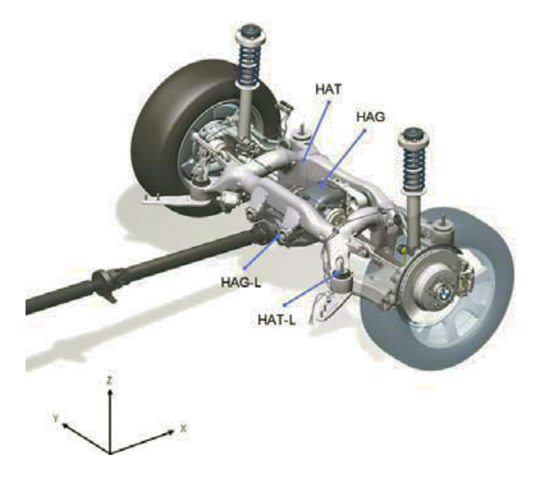


Bild 3-14: Doppelt elastisch gelagertes Hinterachsgetriebe im Standard-Antriebsstrang

3.3.2 Isolationsbauteile

Für die Schwingungsisolation geeignete Elemente müssen elastische Eigenschaften aufweisen. Isolierelemente mit ausschließlich elastischen Eigenschaften können jedoch technisch nicht realisiert werden, da jedes Bauteil gleichzeitig dämpfende Eigenschaften besitzt. Im Automobilbau kommen vorrangig folgende Ausführungsformen von Isolierelementen zum Einsatz:

- Stahlfedern
- Luftfedern
- Elastomerelemente

Stahlfedern werden in unterschiedlichen Ausführungsformen hergestellt (Schraubenfeder, Blattfeder, Tellerfeder, Drehstabfeder). Federstahl zeigt in einem breiten Verformungsbereich nahezu linear elastische Eigenschaften. Alterung, Kriechen und plastische Verformung sind sehr gering und können somit meist vernachlässigt werden. Ein typischer Anwendungsfall im Fahrzeug ist die Aufbaufederung mittels Schraubenfedern.



Bild 3-15: Federbein mit Schraubenfeder (Fa. Sachs)

Luftfedern bestehen im Prinzip aus einem geschlossenen gasgefüllten Raum. Bei Laständerung ergibt sich durch Verschiebung oder Verformung einer Begrenzungsfläche eine Volumenänderung, die eine Druckänderung zur Folge hat. Bei hydropneumatischen Federn wird ein abgeschlossenes Gasvolumen über eine bewegliche Membran von einer Flüssigkeit getrennt. Wird die Feder zusammengedrückt, so leitet die inkompressible Flüssigkeit den Druck über die Membran an das Gas weiter.

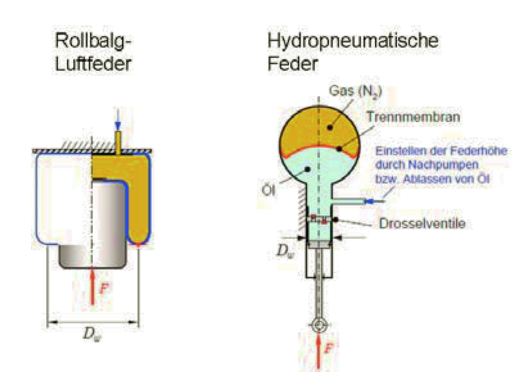


Bild 3-16: Funktionsprinzip Luftfeder und hydropneumatische Feder

Der Kraftverlauf der Luftfeder über dem Federweg s wird von der wirksamen Fläche A_w, dem eingeschlossenen Luftvolumen V_0 und dem Innendruck p_i bestimmt:

$$F(s) = A_w \cdot \left[\frac{p_i \cdot V_0^n}{(V_0 - A_w \cdot s)^n} - p_a \right]$$

$$A_w = \frac{\pi}{4} D_w^2$$

Für den äußeren Luftdruck bei Normalbedingungen gilt:

$p_a = 10^5\,\text{N/m}^2$

Für den Polytropenexponenten n gilt:

$$1 \;\; (isotherm) \leq n(polytrop) \leq 1{,}4 \;\; (adiabat)$$

In nachstehendem **Bild 3-17** ist die Federkennlinie für folgende Zahlenwerte dargestellt:

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Luftvolumen	V_0	$2{,}8 \cdot 10^{-3}$	m^3
wirks. Durchmesser	D_W	0,12	m
Belastung	F_0	$720 \cdot 9{,}81$	N

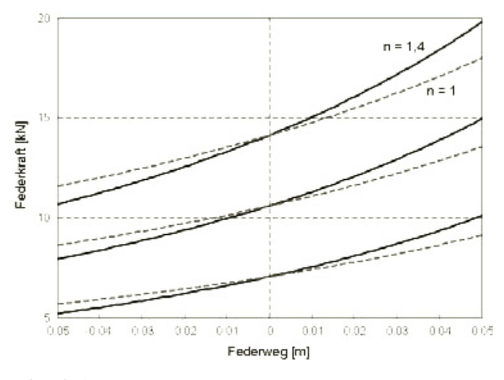


Bild 3-17: Luftfeder-Kennlinien mit unterschiedlicher Belastung F_0

Deutlich ist in dem Bild auch die dynamische Verhärtung beim Übergang von statisch-isothermer auf dynamisch-adiabate Kompression des Gases zu erkennen.

Die Federkonstante c kann wie folgt angenähert werden:

$$c = \frac{dF}{ds} \approx n \cdot p_i \cdot \frac{A_w^2}{V_0}$$

Die Federsteifigkeit ist gemäß obiger Gleichung umgekehrt proportional zum Luftvolumen. Durch ein Zusatz-Luftvolumen kann somit die Federsteifigkeit abgesenkt werden. Eine geringe Federsteifigkeit erfordert bei hohen Lasten rechnerisch große Federwege, welche die Baugröße der Luftfeder überschreiten. Durch Anpassung des Innendrucks an die jeweilige Last F_0 lässt sich die statische Einfederung jedoch kompensieren:

$$F_0 = p_i \cdot A_w$$

Eingesetzt in obige Beziehung für die Federsteifigkeit ergibt sich:

$$c = n \cdot F_0 \cdot \frac{A_w}{V_0}$$

Durch die Wahl des Drucks kann somit die Tragkraft, durch das Luftvolumen davon unabhängig die Federsteifigkeit eingestellt werden. Zu- bzw. Abfuhr von Luft verändern den Höhenstand. Um eine definierte Lage sicherzustellen, benötigen Luftfedersysteme immer eine Lageregelung. Vorteilhaft an Luftfedern ist somit die Tatsache, dass große Tragkraft bei geringer Federsteifigkeit dargestellt werden kann. Nachteilig wirkt sich bei Balg-Luftfedern das schlechte Ansprechen auf kleine Anregungskräfte aus (Kopieren, Kap. 4.1.8). Hier besitzen Stahlfedern prinzipbedingt Vorteile.

Elastomerelemente bestehen normalerweise aus Naturkautschuk oder aus synthetischem Kautschuk. Sie haben neben federnden auch dämpfende Eigenschaften. In Kraftfahrzeugen werden zusätzlich zur eigentlichen Federung in den Endanschlägen der Achsen auch elastische Elemente aus Polyurethan (PUR) oder Microcellular Urethane (MCU) eingesetzt. Dabei handelt es sich um einen Kunststoffschaum, der unter Last komprimiert wird.

Alle Elastomere besitzen viskoelastisches Verhalten (Kapitel 3.3.3) und haben amplituden- und frequenzabhängig nichtlineare Eigenschaften. Daher muss zwischen statischer, kinetischer und dynamischer Steifigkeit unterschieden werden. Die statische Steifigkeit c beschreibt die Steilheit der Kraft-Weg-Kurve bei vernachlässigbarer Verformungsgeschwindigkeit. Eine dynamische Belastung im Bereich bis 1Hz führt zu einer höheren Steifigkeit, die kinetische Steifigkeit c_{kin} genannt wird. Das Verhältnis von statischer und



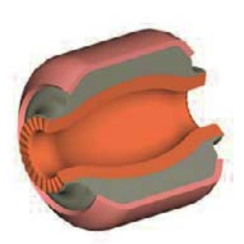


Bild 3-18: Ausführungsformen von Elastomerlagern, links Getriebe-Kerblager (Fa. Trelleborg) und rechts Buchsenlager (Fa. Boge)

kinetischer Steifigkeit wird kinetische Versteifung K_{kin} genannt. Bei üblichen Kautschukmischungen und Elastomeren liegt die kinetische Versteifung bei Werten von 1,5 bis 3.

$$K_{kin} = \frac{c_{kin}}{c}$$

Die Zunahme der dynamischen Steifigkeit bei höheren Frequenzen, auch dynamische Verhärtung genannt, ist abhängig von der Steifigkeit und der Dämpfung d des Materials, sowie von der mitschwingenden Ersatzmasse m*. Die dynamische Impedanz ergibt sich dabei aus der Summation der Einzelimpedanzen:

$$\frac{F}{\dot{x}} = sm^* + \frac{c_{kin}}{s} + d$$

Für den Amplitudengang der dynamischen Steifigkeit C errechnet sich daraus [2]:

$$|C|(\omega) = \sqrt{\left(c_{kin} - m^* \cdot \omega^2\right)^2 + \left(\omega \cdot d\right)^2}$$

Die Steifigkeit eines Elastomerelements wird neben den Materialeigenschaften maßgeblich auch durch die Formgebung, sowie durch zusätzliche Stützelemente, wie z.B. Kunststoffringe, bestimmt. Infolge der Inkompressibilität des Werkstoffs kann eine Verformung nur dann stattfinden, wenn infolge der Druckkräfte in Schubrichtung auch eine Verformung möglich ist. Der Formfaktor q definiert das Verhältnis der belasteten Flächen eines Elementes zu den gesamten freien Flächen parallel zur Belastungsrichtung. Für einen kreisförmigen Elastomerkörper mit dem Durchmesser D und der Höhe h gilt:

$$q = \frac{D}{4h}$$

Mit steigendem Formfaktor nimmt die Tragfähigkeit bzw. die Steifigkeit des Elastomerelementes zu. Alle Elastomerwerkstoffe zeigen zusätzlich ein Setzverhalten unter statischer Last. Dieses setzt sich aus reversiblen Anteilen (Kriechen) und irreversiblen Anteilen (Fließen) zusammen.

Typische Anwendungsfälle für Elastomerlager im Automobilbau und der Zielkonflikt bei der Lagerauslegung sind in **Tabelle 3-2** aufgeführt. Zur Auflösung des Zielkonfliktes, insbesondere in Verbindung mit der zusätzlich notwendigen Körperschalldämmung, werden auch hydraulisch gedämpfte und steuerbare Lager eingesetzt (Kapitel 6.3).

Parameter Lagertyp	große Federsteifigkeit und -dämpfung	kleine Federsteifigkeit und -dämpfung
Motorlager	Verlagerung Motor (Stuckern)	Schwingungs-isolation
Abgasanlagen-aufhängung	Verlagerung Abgasanlage	Schwingungs-isolation
Federbein-Stützlager	Fahrdynamik (horizontal)	Fahrkomfort (vertikal)
Achsträgerlager	Fahrdynamik (horizontal)	Dämmung Fahrbahn-geräusch
Achslenkerlager	Fahrdynamik (horizontal)	Dämmung Fahrbahn-geräusch

Tabelle 3-2: Typische Anwendungsfälle für Elastomerlager im Automobilbau und Auslegungskonflikt

3.3.3 Schwingungsdämpfung

Das Phänomen Dämpfung wird auf unterschiedlichen Systemebenen wirksam (Bauteildämpfung, Systemdämpfung). Dämpfung ist immer die Umwandlung von kinetischer Bewegungsenergie in Wärmeenergie. Damit wird diese Energie dem Schwingungssystem entzogen (Dissipation). Folgende Mechanismen kommen dafür vorrangig in Betracht:

- Materialdämpfung
- Reibungsdämpfung
- Viskose Dämpfung

Wird ein Festkörper wechselnden Belastungen (Kraft bzw. Spannung) ausgesetzt und misst man die zugehörige Dehnung, so ergibt sich im Spannungs- Dehnungsdiagramm eine Hysteresekurve. Für ideal elastisches Material ist die Kennlinie bei Be- und Entlastung identisch. Tatsächlich ergibt sich aber für alle Werkstoffe eine unterschiedlicher Be- und Entlastungskennlinie. Die eingeschlossene Fläche ist ein Maß für die Energiedissipation. Man spricht auch von *Materialdämpfung*. Insbesondere bei Metallen ist die Materialdämpfung in vielen Anwendungsfällen so gering, dass sie bei der Modellierung des Werkstoffverhaltens vernachlässigt werden kann. Bei anderen Materialien, wie z.B. Gummi oder Polymeren sind die Dämpfungseigenschaften zum Teil jedoch stark ausgeprägt und werden auch konstruktiv ausgenutzt (z.B. bei Gummilagerungen und Bauteilen zur Schwingungsdämpfung). Bei der Berechnung solcher Bauteile muss deshalb der Dämpfungsbeschreibung besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden.

Für *viskoelastische Werkstoffe* gilt für den Zusammenhang zwischen Spannung σ und Dehnung ε folgende Beziehung:

$$\sigma = a_0 \cdot \varepsilon + a_1 \cdot \dot{\varepsilon}$$

Für sinusförmige Anregung

$$\underline{\varepsilon} = \hat{\varepsilon} \cdot \cos(\omega \cdot t) = \mathrm{Re}\left\{\hat{\varepsilon} \cdot e^{j\omega t}\right\}$$

ergibt sich daraus folgende Beziehung mit dem Elastizitätsmodul E' und dem Verlustmodul E'' :

$$\underline{\sigma} = \left(E' + j \cdot E''\right) \cdot \underline{\varepsilon}$$
$$E' = a_0$$
$$E'' = a_1 \cdot \omega$$

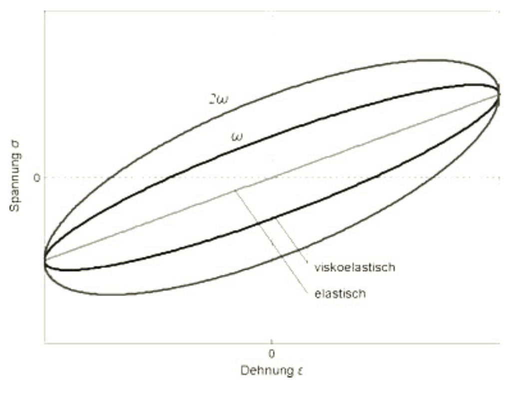


Bild 3-19: Spannungs-Dehnungsverlauf viskoelastischer Werkstoffe

Wie aus **Bild 3-19** ersichtlich wird, verläuft das Stoffgesetz $\sigma(\varepsilon)$ für elastische Werkstoffe linear, während es für viskoelastische Werkstoffe eine elliptische Hysteresekurve durchläuft, die mit zunehmender Frequenz immer breiter wird. In idealen elastischen Werkstoffen findet eine vollständige Umwandlung von potentieller in kinetische Energie (und umgekehrt) statt, während in realen plastischen Materialien nur ein Teil der Energie reversibel ist. Die Verlustarbeit W_{diss} (Fläche unter der Hysteresekurve) im Verhältnis zur potentiellen Energie im Umkehrpunkt W_{pot} wird als Dämpfungsfaktor Ψ bezeichnet:

$$\Psi = \frac{W_{diss}}{W_{pot}} = 2\pi \cdot \frac{E''}{E'}$$

Das Dämpfungsverhalten kann alternativ auch durch den Verlustfaktor η oder den Verlustwinkel δ beschrieben werden:

$$\eta = \frac{1}{2\pi}\frac{W_{diss}}{W_{pot}} = \frac{E''}{E'}$$

$$\delta = \arctan\frac{E''}{E'}$$

Die gewünschte Dämpfung wird vielfach durch eine der Bewegung entgegenwirkende Reibkraft realisiert. Allerdings kann die Reibkraft äußerst komplex sein und von vielen Faktoren abhängen. Für eine effiziente Beschreibung wird daher ein vereinfachtes Reibmodell benötigt, das der real auftretenden Reibkraft möglichst nahe kommt. Reibmodelle, die die Reibkraft als statische Funktion der Geschwindigkeit beschreiben, werden statische Reibmodelle genannt. Demgegenüber stehen dynamische Reibmodelle, die vor allem für regelungstechnische Aufgaben besser zur Modellierung von Reibung geeignet sind, da sie dynamische Effekte im Reibkontakt, die bei der Richtungsumkehr der Bewegung auftreten, exakter abbilden. Das einfachste Reibmodell ist das Coulombsche Reibmodell. Dabei wird angenommen, dass die Reibkraft F_R nur von der Normalkraft F_N im Reibkontakt abhängt und der Relativbewegung in der Kontaktstelle entgegenwirkt:

$$F_R = sign(\dot{x}) \cdot \mu \cdot F_N$$

Tatsächlich gibt es jedoch Reibungseffekte, die sich im Coulombschen Reibmodell nicht abbilden lassen. So nimmt die Reibung bei viskosen Materialien linear mit der Geschwindigkeit zu. Diese Eigenschaft kann durch einen zusätzlichen Term berücksichtigt werden:

$$F_R = p_1 \cdot \dot{x} + p_2 \cdot sign(\dot{x})$$

Außerdem lässt sich beispielsweise bei Getrieben durch die Temperaturerhöhung des Öls im Betrieb eine degressive Charakteristik der viskosen Reibung feststellen. Ebenfalls interessant ist der Stribeck-Effekt. Hierbei sinkt die Reibkraft nach dem Losbrechen der Kontaktstelle zunächst ab. Wird die Reibgeschwindigkeit erhöht, erreicht die Reibkraft ein Minimum, nimmt für höhere Geschwindigkeiten aber wieder zu. Dieser Effekt spielt z.B. bei der Aufbaufederung (Kapitel 4.1) sowie bei Kontaktstellengeräuschen (Kapitel 13.1) eine wichtige Rolle.

3.3.4 Dämpfungsbauteile

Lineare viskoelastische Bauteile lassen sich mit Hilfe der Federsteifigkeit c und des Dämpfungskoeffizienten d durch folgende Differentialgleichung beschreiben (Voigt-Kelvin-Modell):

$$F = F_c + F_d = c \cdot x + d \cdot \dot{x}$$

Für die *Bauteildämpfung* gilt in diesem Fall:

$$d = \Psi \cdot \frac{c}{2\pi \cdot \omega} = \eta \cdot \frac{c}{\omega}$$

Reale Strukturelemente und auch Bauteile zeigen vielfach stark nichtlineare Dämpfungskennlinien **(Bild 3-20)**.

$$F_d = k \cdot v_d^n$$

$n = 0$	trockene (coulombsche) Reibung
$n < 1$	degressive Kennung
$n = 1$	lineare Kennung (viskose Reibung)
$n > 1$	progressive Kennung (turbulente Reibung)

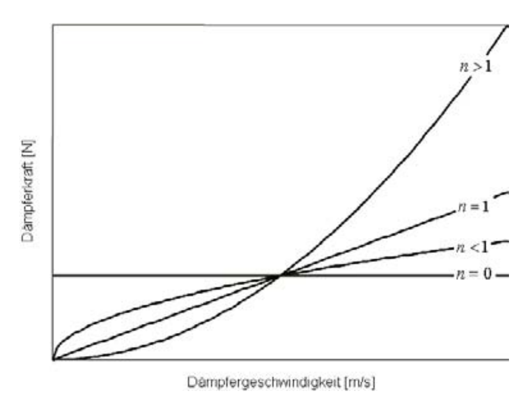


Bild 3-20: Archetypische Dämpfungskennlinien

Wichtige Ausführungsformen von Schwingungsdämpfern sind hydraulische Teleskopdämpfer und Luftfederdämpfer für translatorische Bewegungen, sowie hydraulisch gedämpfte Schraubenfederkupplung und Kammerdämpfer für torsionale Schwingungen.

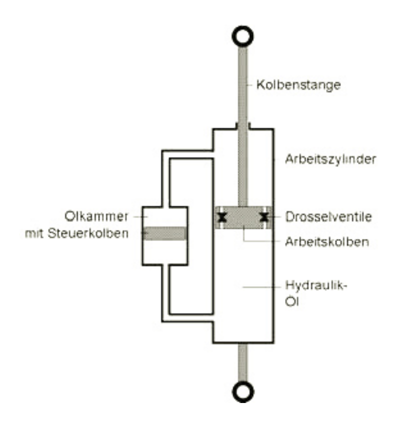


Bild 3-21: Hydraulischer Teleskopdämpfer (Zweikammerdämpfer mit optionalen Bypasselementen)

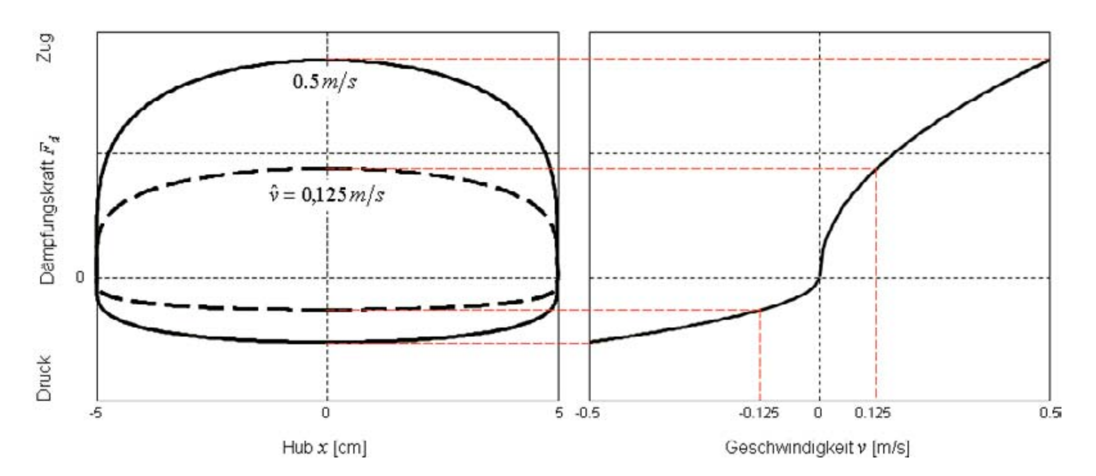


Bild 3-22: VDA-Dämpfkraft-Kennlinien *x-F* (links) und *v-F* (rechts) eines hydraulischen Teleskopdämpfers

Das Dämpfungsprinzip des *hydraulischen Teleskopdämpfers* beruht auf der Verdrängung eines Dämpferöls durch die Bewegung des Hubkolbens. Dabei wird das Dämpferöl durch Öffnungen im Arbeitskolben von einem Arbeitsraum in den anderen Arbeitsraum geleitet (Zweikammerdämpfer). Die Drosselventile ermöglichen durch richtungsabhängiges Drosselverhalten unterschiedliche Kennlinien in der Zug- und in der Druckstufe. Zur Verbesserung des Komfortverhaltens kann durch Verschiebung des Steuerkolbens in der Ölkammer bei kleinen Dämpferhüben ein Teil des Ölstroms am Arbeitskolben vorbei geleitet werden, was die Dämpfkraft reduziert und damit das Isolationsverhalten der Federung weniger beeinträchtigt. Bei größeren Dämpferhüben ist der Steuerkolben am Anschlag und damit die volle Dämpfkraft verfügbar. Anwendung findet der Teleskopdämpfer im Automobil in erster Linie zur Dämpfung von Aufbauschwingungen. Der hier oft verwendete Begriff Stoßdämpfer ist insofern irreführend, als bei stoßartiger Einfederung gerade keine oder nur geringe Dämpfungswirkung gewünscht wird, um das Isolationsverhalten nicht zu beeinträchtigen. Daher werden in der Druckstufe flachere Kennlinienverläufe mit zumeist degressiver Kennung verwendet. Zur Charakterisierung des Dämpfers wird dieser mit einer sinusförmigen Weganregung beaufschlagt:

$$x = \hat{x}\sin(\omega \cdot t)$$

Für die Geschwindigkeit gilt in diesem Fall:

$$v = \hat{x} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) = \hat{v} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \hat{v}/\hat{x}$$

Das *v-F*-Diagramm zeigt den Dämpfkraftverlauf, während die eingeschlossene Fläche im *x-F*-Diagramm (Rundlaufdiagramm) die Verlustenergie während eines Arbeitszyklus repräsentiert (**Bild 3-22**).

Bei hohen Anregungsfrequenzen werden die Drosselventile nicht mehr ausreichend durchströmt, so dass es physikalisch zu einer Trennung der Volumina ober- und unterhalb der Drosselstelle kommt. Für diesen Fall steigt aufgrund des inkompressiblen Mediums die Steifigkeit des hydraulischen Dämpfers stark an (dynamische Verhärtung). Die Drücke im hydraulischen Dämpfer erfordern vorgespannte Dichtungen, die bei Bewegung coulombsche Reibungskräfte verursachen, was Komforteinbußen zur Folge hat.

Der konventionelle hydraulische Stoßdämpfer besitzt keine Möglichkeit, die Dämpfkraft an wechselnde Betriebsbedingungen wie Beladung, Fahrbahnzustand oder Fahrgeschwindigkeit anzupassen. Um diesem Mangel abzuhelfen, sind auch Systeme mit last- und amplitudenabhängiger Dämpfkraftverstellung im Einsatz. Solche moderne ContinuousDampingControl-Systeme mit Proportionalventilen können quasi stufenlos zwischen verschiedenen Grenzkennlinien verstellt werden; die Verstellzeit liegt bei ca. 15 ms, so dass bei geeigneter Sensorik zusammen mit entsprechenden Regelalgorithmen auch Reaktionen auf hochfrequente Fahrwerks-Anregungen durch Einzelhindernisse möglich sind. Auf noch kürzere Verstellzeiten wird aufgrund der damit verbundenen Geräuschentwicklung verzichtet.

Die Verwendung von Gas im *Luftfederdämpfer* hat den prinzipbedingten Vorteil eines kompressiblen Dämpfungsmediums. So kann bei hohen Frequenzen von zwei parallel geschalteten Gasfedern ausgegangen

werden. Daraus ergibt sich ein oberes Steifigkeitsniveau für gasgedämpfte Systeme, das bei steigenden Frequenzen im Gegensatz zu hydraulisch gedämpften Systemen nicht weiter zunimmt. Mit steigender Anregungsfrequenz wächst der Volumenstrom durch den Drosselquerschnitt und die Dämpfarbeit nimmt zu. Der Luftfederdämpfer lässt sich durch anwachsende dynamische Steifigkeit bei zunehmendem Verlustwinkel beschreiben. Das Dämpfungsmaximum wird erreicht, wenn die Luft mit Schallgeschwindigkeit durch den Drosselquerschnitt strömt. Dieser Zustand wird durch die charakteristische Frequenz f_0 beschrieben. Diese errechnet sich aus der Schallgeschwindigkeit der Luft c_0, dem Drosselquerschnitt q und der Anregungsamplitude x wie folgt:

$$f_0 \approx 2 \cdot \frac{c_0 \cdot p_i \cdot q}{V_0} \sqrt{\frac{\hat{x} \cdot A}{V_0}}$$

Im Gegensatz zum hydraulisch gedämpften System fällt der Verlustwinkel oberhalb der charakteristischen Frequenz wieder ab und das Verhalten entspricht dem zweier parallel geschalteter Luftfedern. Die Abdichtung der Volumina gegeneinander erfolgt mit Luftfederbälgen, die nur ein Minimum an komfortmindernder Reibung verursachen.

Das Funktionsprinzip des *seismischen Dämpfers* besteht darin, dass eine seismische Masse m_S über ein elastisches Element mit der Nachgiebigkeit n_S und dem Dämpfungsfaktor d_S an das Schwingungssystem gekoppelt wird. Im Gegensatz zu einem Tilger, bei dem die Eigenfrequenz etwa gleich der Erregungsfrequenz gewählt wird (Kapitel 3.3.6), erfolgt hier die Abstimmung der Eigenfrequenz des Zusatzschwingers weit unterhalb der Erregerfrequenz. Damit bleibt die seismische Masse praktisch in Ruhelage.

$$n_S \cdot m_S >> \frac{1}{\omega_0^2} = n \cdot m$$

Mit der Zusatzbedingung

$$\omega^2 \cdot m > \omega \cdot d_S > \frac{1}{n}$$

wird gewährleistet, dass auf das Schwingsystem bei seiner Relativbewegung praktisch nur die Dämpfungskraft einwirkt. Für den Dämpfungsgrad ergibt sich in diesem Fall:

$$D \approx \frac{d_S}{2 \cdot \omega_{01} \cdot m}$$

$$\omega_{01}^2 \approx \frac{n + n_S}{n \cdot n_S \cdot m}$$

Beim *Kammerdämpfer* mit träger Sekundärmasse wird durch die oszillierende Relativbewegung zwischen Nabe und Sekundärmasse Öl durch enge Spalte dissipiert. Dabei fehlt im Gegensatz zum seismischen Dämpfer die elastische Lagerung. Daher ist auch die Mittellage nicht definiert. Kammerdämpfer werden am freien Ende der Kurbelwelle von Verbrennungsmotoren montiert, um Drehschwingungen der Kurbelwelle zu bedämpfen.

3.3.5 Systemdämpfung

Ein Schwingsystem bestehend aus einem viskoelastischen Bauteil und einer Masse besitzt eine *Systemdämpfung*, die mit dem Dämpfungsgrad D nach Kapitel 3.1.1 charakterisiert werden kann:

$$D = \frac{d}{2\sqrt{c \cdot m}} = \frac{\eta}{2 \cdot \omega / \omega_0}$$

In der Eigenresonanz ist der Dämpfungsgrad direkt proportional zum Verlustfaktor:

$$D = \frac{\eta}{2}$$

Die Resonanzüberhöhung der Vergrößerungsfunktion V nimmt mit zunehmendem Dämpfungsgrad ab:

$$V_{\max}(\omega) = \frac{1}{2 \cdot D \cdot \left(1 - D^2\right)}$$

$$V_{\max}(\omega) \approx \frac{1}{2 \cdot D} = \frac{1}{\eta} \qquad \text{für } D < 0.3$$

Aus **Bild 3-10** geht hervor, dass ideales Isolationsverhalten hohe Dämpfung im Bereich der Resonanzfrequenz erfordert, während im höherfrequenten Isolationsbereich geringe Dämpfung und geringe Steifigkeit wünschenswert wäre. Dieses Verhalten kann durch eine *elastische Dämpferanbindung* angenähert werden, wie **Bild 3-24** zeigt.

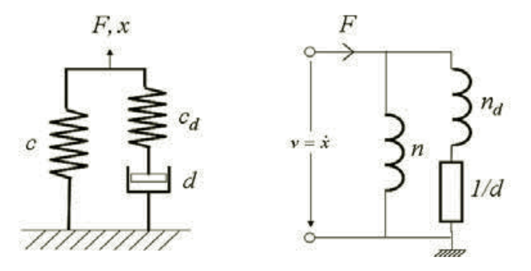


Bild 3-23: Feder-Dämpfer-System mit elastischer Dämpferanbindung

Die komplexe dynamische Steifigkeit obiger Feder-Dämpfer-Kombination errechnet sich zu:

$$C = \frac{F}{x} = s \cdot \left(\frac{1}{s \cdot n} + \frac{1}{s \cdot n_d + 1/d} \right)$$

Daraus ergibt sich der Amplitudengang

$$|C| = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\omega^2 \cdot d^2 (n_d^2 + 2n_d \cdot n + n^2) + 1}{(\omega \cdot n_d \cdot d)^2 + 1}}$$

und der Verlustwinkel

$$\delta_c = \arctan\left(\frac{\omega \cdot n \cdot d}{\omega^2 \cdot d^2 (n_d^2 + n \cdot n_d) + 1} \right)$$

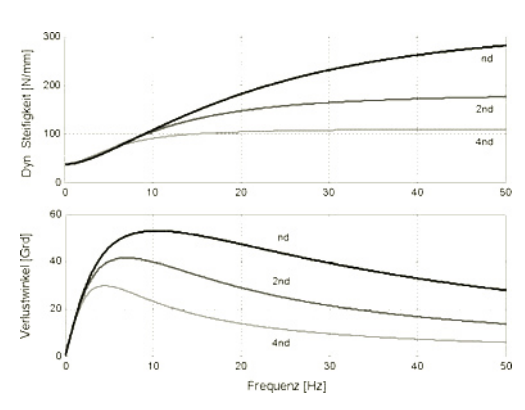


Bild 3-24: Amplitudengang der Steifigkeit und Verlustwinkel eines Feder-Dämpfer-Systems bei elastischer Dämpferanbindung

Ohne elastische Lagerung des Dämpfers steigt die dynamische Steifigkeit mit zunehmender Frequenz unbegrenzt an, während sich der Verlustwinkel asymptotisch dem Wert 90° annähert:

$$|C|(\omega = 0) = 1/n; \ |C|(\omega \to \infty) \to \infty$$

$$\delta(\omega = 0) = 0; \ \delta(\omega \to \infty) \to \pi/2$$

Bei elastischer Lagerung wird dagegen die dynamische Steifigkeit zu hohen Frequenzen hin begrenzt.

$$|C|(\omega = 0) = \frac{1}{n}; \ |C|(\omega \to \infty) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n_d}$$

Der Verlustwinkel steigt nur bis zur Frequenz ω_{max} auf den Wert δ_{max} an und sinkt anschließend langsam wieder gegen Null ab:

$$\omega_{max} = \frac{1}{d \cdot \sqrt{n_d (n + n_d)}}$$

$$\delta_{max} = \arctan\left(\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n_d (n + n_d)}} \right)$$

Von der elastischen Anbindung des Dämpfers wird unter anderem beim Feder-Dämpfer-System des Fahrzeug-Aufbaus Gebrauch gemacht (Kapitel 4.1.1). Damit wird maximale Dämpfung im Bereich der Radresonanz bei geringer Beeinträchtigung der höherfrequenten Isolation von Fahrbahnanregungen ermöglicht.

Bei hochdynamisch steuerbaren Dämpfern kann durch geeignete Regelalgorithmen ebenfalls das Isolationsverhalten signifikant verbessert werden. Eines der verbreitetsten Regelgesetze zur Dämpferregelung in Aufbaufederungen von Fahrzeugen stellt das sogenannte *Skyhook-Prinzip* dar. Dieses beruht auf der Idee, den passiven Dämpfer zwischen der Wegerregung und der schwingenden Aufbaumasse durch einen virtuellen Dämpfer zu ersetzen, der direkt mit dem ruhenden Inertialsystem verbunden ist (am Himmel festgehakt). Praktisch wird das Skyhook-Prinzip jedoch dadurch realisiert, dass der nach dem Skyhook-Algorithmus ermittelte Dämpfungsbedarf über eine Ansteuerelektronik auf einen konventionell angebrachten steuerbaren Dämpfer übertragen wird.

Der Skyhook-Algorithmus erfordert für den Fall, dass sich der Aufbau nach oben und das Rad gleichzeitig nach unten bewegt, eine Kraft im realen Dämpfer, die gegen die Aufbaubewegung und mit der Radbewegung gerichtet ist. Eine derartige Kraft kann nur ein aktiver Dämpfer liefern, bei dem Energie zugeführt wird. Für semiaktive Dämpfer, welche Dämpfungskräfte nur in den zwei Quadranten gegen die Relativbewegung aufbauen können, lässt sich das Skyhook-Prinzip nur zur Hälfte realisieren. Der Algorithmus wird dafür wie folgt modifiziert:

$$\dot{x} \cdot (\dot{x} - \dot{u}) > 0 \Rightarrow \textit{harte Kennung}$$
$$\dot{x} \cdot (\dot{x} - \dot{u}) < 0 \Rightarrow \textit{weiche Kennung}$$

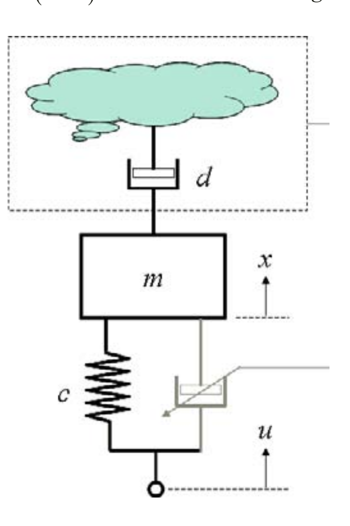


Bild 3-25: Prinzip des Skyhook-Dämpfers

Nach Kapitel 3.1.1 ergibt sich die Vergrößerungsfunktion des Einmassenschwingers mit konventionellem Dämpfer zu:

$$\left|\frac{x}{u}\right| = \sqrt{\frac{1+4D^2\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4D^2\eta^2}} = V_2$$

Beim idealen Skyhook-Dämpfer entfällt die Nullstelle im Zähler, damit ergibt sich die gleiche Vergrößerungsfunktion wie im Fall der harmonischen Krafterregung:

$$\left|\frac{x}{u}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+4D^2\eta^2}} = V_1$$

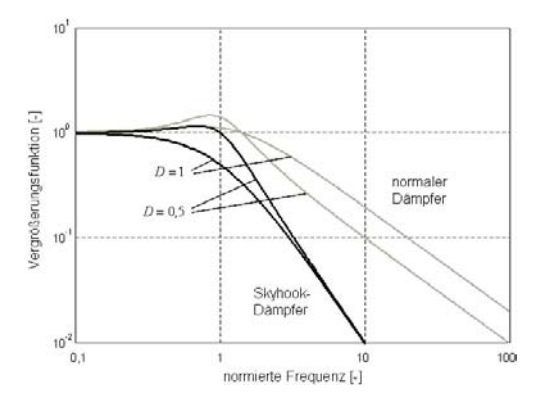


Bild 3-26: Amplitudengang normaler Dämpfer vs. Skyhook-Dämpfer

Der Vergleich in **Bild 3-26** zeigt deutlich die Vorteile des Skyhook-Dämpfers. Oberhalb der Resonanzfrequenz lässt sich eine deutlich bessere Isolation erreichen, ohne im Bereich der Resonanz unerwünschte Überschwinger in Kauf nehmen zu müssen.

Mit dem *Huang-Algorithmus* wird ebenfalls eine optimierte Dämpfungseinstellung ermöglicht. Ausgangspunkt ist hier die Bewegungsgleichung:

$$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \left(\dot{x}-\dot{u}\right) + c \cdot \left(x-u\right) = 0$$

Unter Vernachlässigung der Frequenzbewertung gemäß Kapitel 3.5 kann die effektive Aufbaubeschleunigung

$$\ddot{x}_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{x}^2 dt}$$

als Maß für den Fahrkomfort angesehen werden. Setzt man die Aufbaubeschleunigung aus obiger Bewegungsgleichung ein, so ergibt sich:

$$\ddot{x}_{eff} = \sqrt{-\frac{1}{T \cdot m}\int_0^T d\left(t\right)\ddot{x}\left(\dot{x}-\dot{u}\right)dt - \frac{c}{T \cdot m}\int_0^T \ddot{x}\left(x-u\right)dt}$$

Der erste Summand unter der Wurzel repräsentiert den Beitrag der Dämpfungskraft zur Aufbaubeschleunigung, welcher immer positiv bleibt. Um optimalen Fahrkomfort zu erzielen, sollte der Dämpfungskoeffizient d so variiert werden, dass dieser Summand möglichst klein wird. Dies lässt sich mit folgendem Regelprinzip erreichen:

$$\ddot{x} \cdot \left(\dot{x}-\dot{u}\right) > 0 \Rightarrow harte\ \ Kennung$$

$$\ddot{x} \cdot \left(\dot{x}-\dot{u}\right) < 0 \Rightarrow weiche\ \ Kennung$$

Stimmen Dämpfkraft und Aufbaubeschleunigung überein, so verstärkt die Dämpfkraft die Beschleunigung, daher wird hier die weiche Kennung gewählt. Stimmen sie nicht überein, so vermindert die Dämpfkraft die Aufbaubeschleunigung, daher wird in diesem Fall die harte Kennung eingestellt.

3.3.6 Schwingungstilger

Schwingungstilgung ist die Kompensation der Wirkung von translatorischen Erregerkräften oder rotatorischen Erregermomenten durch entgegengesetzt gerichtete Massenkräfte oder -momente. Bei passiven Tilgern wird diese Gegenkraft durch ein zusätzlich am Schwingungssystem angebrachtes Feder-Masse-System erzeugt. Bei aktiven Systemen werden die Gegenkräfte von aktiv angesteuerten Aktuatoren aufgebracht. Schwingungstilgung kann jedoch auch ohne Zusatzelemente aufgrund von Massenkraftkompensationen innerhalb eines gegebenen Systems vorliegen. Der Effekt der Schwingungstilgung kann verstanden werden als Beruhigung einer Teilstruktur eines Systems durch Umleitung der Schwingungsenergie auf eine andere Teilstruktur. Dabei geht beim idealen Tilger keine Schwingungsenergie verloren. In der Praxis werden Tilger jedoch zumeist mit Dämpfungselementen kombiniert.

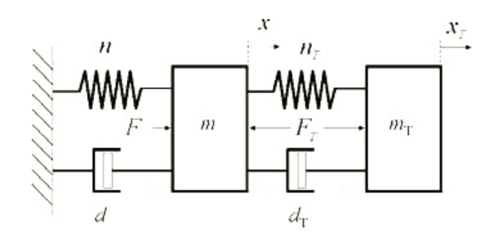
Nimmt man für das primär erregte System im einfachsten Fall einen Einmassenschwinger mit der Masse m und der Nachgiebigkeit n an, so gilt für die Resonanzfrequenz:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{m \cdot n}$$

Koppelt man dieses Schwingsystem mit einem zweiten Einmassenschwinger der Masse m_T und der Nachgiebigkeit n_T und der Resonanzfrequenz

$$\omega_T^2 = \frac{1}{m_T \cdot n_T}$$

so erhält man einen Zweimassenschwinger, wie er in **Bild 3-27** dargestellt ist.



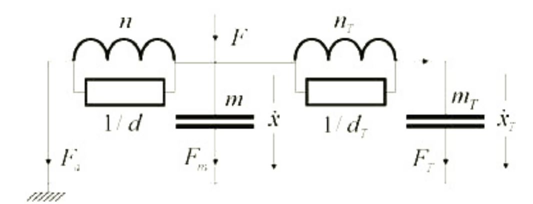


Bild 3-27: Einmassenschwinger mit angekoppeltem Tilger

Die externe Kraft *F*, welche an der Masse *m* angreift, befindet sich im Kräftegleichgewicht mit der Massenkraft F_m, der Feder- und Dampferkraft F_a und der Kraft F_T, welche durch den Tilger auf die Masse *m* ausgeübt wird:

$$F = F_m + F_a + F_T$$

$$F_m = s^2 \cdot m \cdot x$$

$$F_a = (s \cdot d + c) \cdot x$$

$$F_T = \frac{s^2 \cdot m_T \cdot (s \cdot d_T + c_T)}{s^2 \cdot m_T + s \cdot d_T + c_T} \cdot x$$

In **Bild 3-28** ist dieser Sachverhalt als Signalfluss grafisch dargestellt. Es lässt sich gut erkennen, dass sich die Restkraft, welche für die Beschleunigung der Masse *m* zur Verfügung steht, aus der Differenz zwischen der anregenden Kraft *F* und der Summe aus der Feder- und Dämpferkraft F_a und der Tilgerkraft F_T ergibt. Damit bildet der Tilger einen Kompensationspfad entsprechend seiner frequenzabhängigen Übertragungsfunktion und trägt damit zur Beruhigung der Schwingbewegung bei.

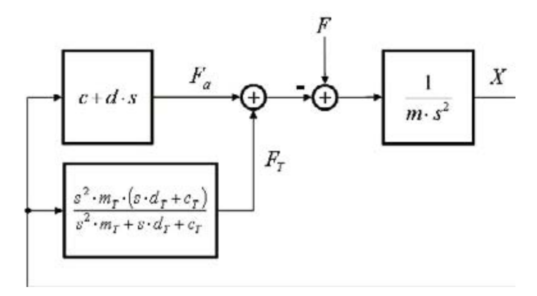


Bild 3-28: Signalfluss des passiven Tilgers

Ohne Berücksichtigung des Dämpfungsverhaltens und mit den Normierungen

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0} ,$$

$$\mu = \frac{m_T}{m} ,$$

$$\lambda = \frac{\omega_T}{\omega_0} ,$$

ergibt sich nachstehender Zusammenhang für die Übertragungsfunktion der Masse *m*:

$$H_m(\eta) = \frac{x(\eta)}{x(0)} = \frac{\lambda^2 - \eta^2}{\eta^4 - \eta^2\left(1 + \lambda^2 + \mu\lambda^2\right) + \lambda^2}$$

Stimmt man nun die Tilgungsfrequenz auf die Anregungsfrequenz ab,

$$\omega_T = \omega_0 \succ \lambda = 1$$

so erhält man für die Schwingbewegung der Massen *m* und m_T die vereinfachten Übertragungsfunktionen:

$$H_m = \frac{1 - \eta^2}{\left(\eta^2 - 1\right)^2 + \eta^2 \cdot \mu}$$

$$H_T = \frac{1}{(1 - \eta^2)^2 - \eta^2 \cdot \mu}$$

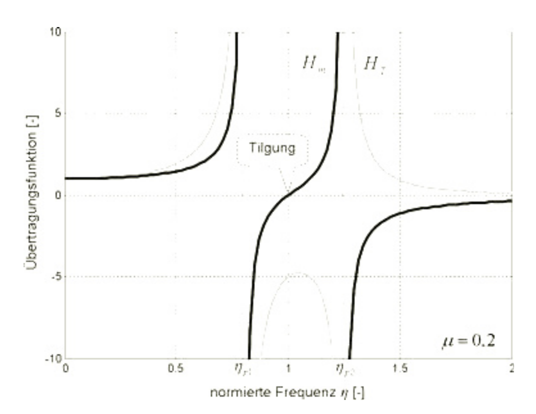


Bild 3-29: Übertragungsfunktionen der Massen *m* und m_T

Aus **Bild 3-29** wird ersichtlich, dass die Schwingamplitude der Masse *m* bei der Tilgungsfrequenz $\omega_0 = \omega_T$ zu Null wird. Gleichzeitig findet durch die

Kopplung der beiden Schwingsysteme eine Frequenzaufspaltung statt (Kapitel 3.1.3) und es entstehen zwei neue Polstellen $\eta_{p1/2}$. Diese lassen sich aus der Übertragungsfunktion H_m ableiten:

$$\eta_{p1,2}^2 = 1 + \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\mu + \left(\frac{\mu}{2}\right)^2}$$

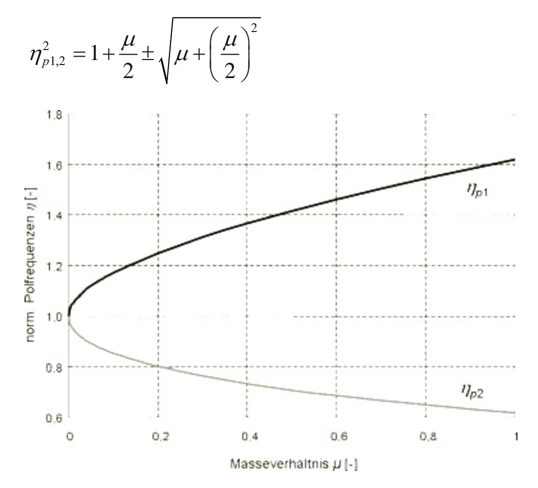


Bild 3-30: Normierte Polfrequenzen in Abhängigkeit vom Massenverhältnis

Wie **Bild 3-30** zeigt, rücken die Polstellen umso weiter auseinander, je größer das Masseverhältnis μ gewählt wird. Bei einer verschwindenden Tilgermasse bleibt nur die eine Polstelle des Anregungssystems erhalten.

Berücksichtigt man zusätzlich das Dämpfungsverhalten der beiden Schwingungssysteme, so gilt für die Übertragungsfunktion der Masse m:

$$H_m = \left(1 - \eta^2 + j\eta 2D_m - \frac{\eta^2 \cdot (1 + j\eta 2D_T)}{1 - \eta^2 + j\eta 2D_T} \cdot \mu\right)^{-1}$$

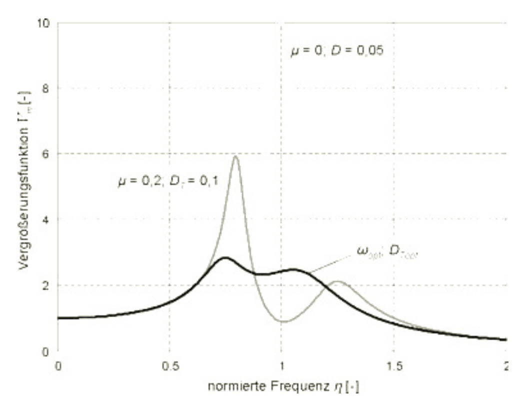


Bild 3-31: Betrag der Übertragungsfunktion (Vergrößerungsfunktion) des Einmassenschwingers ohne und mit Tilger

mit

$$D_m = \frac{d}{2 \cdot \omega_0 \cdot m} \qquad \text{Dämpfung Schwingsystem}$$

$$D_T = \frac{d_T}{2 \cdot \omega_0 \cdot m_T} \qquad \text{Dämpfung Tilger}$$

Bild 3-31 illustriert eindrucksvoll die amplitudenreduzierende Wirkung des Tilgers an der Stelle der Resonanzfrequenz $\eta = 1$. Gleichzeitig erkennt man auch die zwei Nebenmaxima aufgrund der zusätzlichen Polstellen. Die Amplituden der Nebenmaxima sind unterschiedlich stark ausgeprägt. Legt man die Tilgungsfrequenz in Abhängigkeit vom Massenverhältnis μ geringfügig abweichend von der Resonanzfrequenz ω_0 fest,

$$\omega_{T\,opt} = \frac{1}{1+\mu} \cdot \omega_0$$

und wählt für den Dämpfungsgrad den Wert

$$D_{T\,opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8 \cdot (1+\mu)^3}} \ ,$$

so erhält man für die Vergrößerungsfunktion einen optimalen Verlauf mit zwei in etwa gleich großen Amplituden für die beiden Nebenmaxima (bei $D = 0$) und geringer Welligkeit. Dieser optimierte Verlauf ist ebenfalls in **Bild 3-31** dargestellt. In der Praxis sind für derartige Tilger Massenverhältnisse $\mu \leq 0{,}2$ üblich.

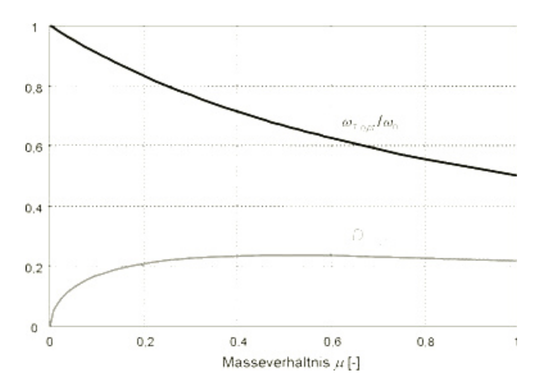


Bild 3-32: Optimales Frequenzverhältnis und optimaler Dämpfungsgrad eines Schwingungstilgers

Zusammenfassend gilt, dass durch einen Schwingungstilger in der Umgebung der Tilgungsfrequenz die Schwingamplituden erheblich reduziert werden, gleichzeitig aber zwei neue Schwingmoden mit vergrößerten Amplituden entstehen. Durch optimale Abstimmung von Resonanzfrequenz und Dämpfung des

Tilgers wird der günstigste Verlauf der Vergrößerungsfunktion gefunden. In **Bild 3-33** ist der Verlauf des Maximalwertes der Vergrößerungsfunktion bei Variation der Tilgerabstimmung aufgezeigt. Durch die Nebenmaxima des Tilgers ist keine vollständige Kompensation der Schwingung des ursprünglichen Systems mehr gegeben. Der Abstimmpunkt stellt ein relativ scharfes Optimum dar, daher führt schon eine geringe Verstimmung des Tilgers zu einer erheblich reduzierten Tilgungswirkung. Vergrößert man die Dämpfung des Tilgers über den Optimalwert hinaus, so nimmt zwar die Kompensationswirkung bei der Abstimmfrequenz ab, dafür ist der Tilgungsseffekt in einem breiteren Frequenzbereich wirksam.

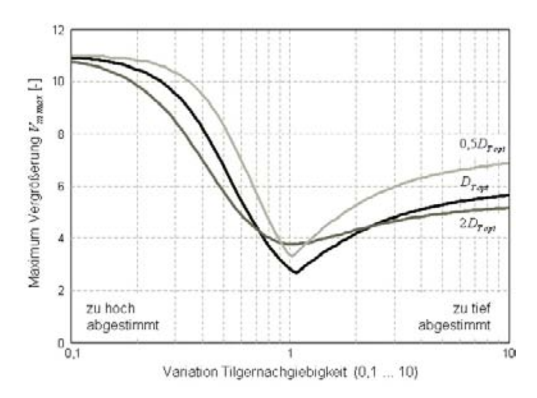


Bild 3-33: Maximum der Vergrößerungsfunktion bei Variation der Tilgerabstimmung

Bei den vorstehenden Betrachtungen wurde vereinfachend davon ausgegangen, dass es sich bei dem Schwingungssystem, an dem ein Tilger appliziert werden soll, um einen einfachen Einmassenschwinger mit einem Freiheitsgrad handelt. In der Praxis ist diese Annahme häufig nicht erfüllt. In diesem Fall muss das vorliegende Mehrmassensystem mit mehreren Freiheitsgraden auf ein Ersatzsystem mit einem Freiheitsgrad reduziert werden. Die kinetische Energie aller Schwingmoden des Mehrmassensystems mit den Schwingfrequenzen ω_j, den Massen m_j und den Schwingamplituden x_j wird dabei der kinetischen Energie des Ersatzsystems mit der Ersatzmasse m_{ers} und der Ersatz-Steifigkeit c_{ers} gleichgesetzt. Gleichzeitig wird auch die Schwingamplitude des Ersatzsystems mit derjenigen der k-ten Masse gleichgesetzt, an der der Tilger angebracht werden soll.

$$W_{kin\,k} = \frac{1}{2}\sum_j m_j \cdot \dot{x}_{jk}^2 = \frac{1}{2}\sum m_{ers\,k} \cdot \dot{x}_{ers\,k}^2$$

$$\dot{x}_k = \dot{x}_{ers}$$

Daraus folgt für die Ersatzmasse und die Ersatzsteifigkeit:

$$m_{ers\,k} = \sum_j m_j \cdot \left(\frac{\dot{x}_j}{\dot{x}_k}\right)^2$$

$$c_{ers\,k} = m_{ers\,k} \cdot \omega_{0k}^2$$

Greift die anregende Kraft nicht, wie bisher unterstellt, an derjenigen Masse an, an der auch der Tilger angebracht werden soll, sondern an der Masse *n*, dann gelten ebenfalls vorstehende Berechnungsvorschriften für die Ersatzgrößen Masse und Steifigkeit. Allerdings gilt in diesem Fall für die Anregungskraft folgende Ersatzgröße:

$$F_{ers\,k} = \frac{\dot{x}_k}{\dot{x}_n} \cdot F_n$$

In der Praxis sind unterschiedlichste Bauformen von Schwingungstilgern im Einsatz.

Die einfachste Form stellen *Elastomer-Metall-Tilger* dar. Dabei übernimmt das Elastomer die Federungs- und Dämpfungswirkung, die Masse wird durch einen anvulkanisierten Metallblock gebildet. Zusatzdämpfung kann durch einen silikongefüllten Scherspalt zwischen Flansch und Tilgermasse erzielt werden. Anwendungen finden Elastomer-Metall-Tilger in vielfältigen Bauformen zur Beeinflussung der verschiedensten Schwingungsphänomene sowohl als translatorische Tilger als auch als Drehschwingungstilger.

Drehschwingungstilger werden auch als reine *Scherspalt-Tilger* ausgeführt. Bei dieser Bauform ist die Tilgermasse nur mittels Silikonöl über einen Scherspalt an den Flansch gekoppelt. Die Scherspannungen über die gesamte Spaltfläche summiert ergeben ein elastisches und dämpfendes Drehmoment. Ein typisches Anwendungsgebiet ist die Reduzierung von Drehschwingungen bei Kurbel- und Steuerwellen in Verbrennungsmotoren.

Bei *Feder-Tilgern* wird die Elastizität durch translatorisch oder radial angeordnete Federn (Schrauben-, Hülsen-, Blatt- oder Bogenfedern) erzielt. Quetschöldämpfung oder Coulomb'sche Reibung sorgen für die notwendige Dämpfung.

3.3.7 Fliehkraftpendel

Obwohl das Prinzip des Fliehkraftpendels theoretisch bereits in den 30er Jahren des vorigen Jahrhunderts für die Anwendung im Automobil untersucht wurde [3], hat es sich bis heute als schwierig erwiesen, bauraumkonforme und kostengünstige konstruktive Lösungen zu finden. Daher werden FKP's erst in jüngster Zeit zur Tilgung von Schwingungen des Antriebstrangs eingesetzt (Kapitel 9.4).

Ein Fliehkraftpendel (FKP) besteht im Wesentlichen aus beweglich angeordneten Pendelgewichten, die sich infolge der Massenkräfte F_m und der Zentrifugalkräfte F_z entlang vorgegebener Bahnen relativ zum rotierenden Träger bewegen können. In **Bild 3-34** ist der einfachste Fall in Form einer einzelnen pendelnd aufgehängten Punktmasse dargestellt (Taylor-Pendel).

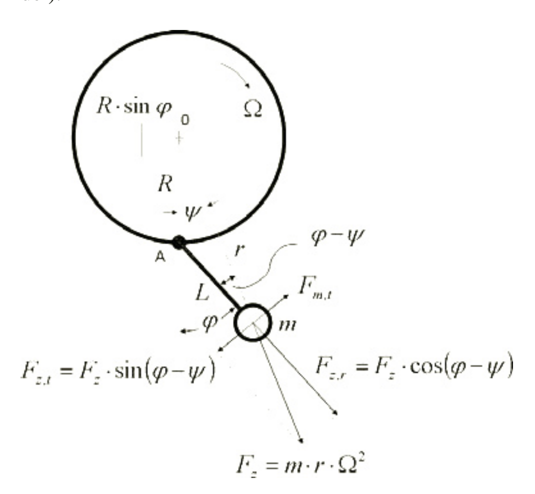


Bild 3-34: Fliehkraftpendel Prinzipskizze

Die Ausschläge des Pendels mit dem Winkel φ erfolgen auf einer Kreisbahn um den Drehpunkt A. Gleichzeitig dreht sich der Pendelträger um den Winkel $\theta = \Omega \bullet t$ um seinen Drehpunkt 0. Auf die Pendelmasse m wirken bei Vernachlässigung der Gewichtskraft nur die tangentialen Komponenten der Massenkraft F_m und der Zentrifugalkraft F_z bezogen auf den Drehpunkt A ein:

$$F_{m,t} = m \cdot L \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot r \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\varphi - \psi)$$

$$F_{z,t} = m \cdot r \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\varphi - \psi)$$

Unter der Annahme einer reibungsfreien Lagerung des Pendels im Drehpunkt A wird die resultierende Kraft in tangentialer Richtung zu Null. Berücksichtigt man noch die geometrischen Zusammenhänge

$$r \cdot \sin(\varphi - \psi) = R \cdot \sin\varphi$$

$$r \cdot \cos(\varphi - \psi) = L + R \cdot \sin\varphi$$

und betrachtet nur kleine Winkel φ, so erhält man für den Pendelausschlag die vereinfachte Bewegungsgleichung:

$$(L+R) \cdot \ddot{\theta} + L \cdot \ddot{\varphi} + R \cdot \Omega^2 \cdot \varphi = 0 \qquad (3\text{-}1)$$

Auf den Pendelträger mit dem Massenträgheitsmoment J_T wirkt nur die Radialkraftkomponente der Pendelmasse über den Hebelarm $R \cdot \sin\varphi$ ein. Für kleine Pendelausschläge kann sowohl die radiale Massenkraft als auch die Corioliskraft vernachlässigt werden. Damit bleibt nur die Radialkraftkomponente der Zentrifugalkraft zu berücksichtigen. Für diesen Fall ergibt sich die Bewegungsgleichung für den Pendelträger um den Drehpunkt 0 wie folgt:

$$M = J_T \cdot \ddot{\theta} + F_{z,r} \cdot R \cdot \sin\varphi$$

$$M \approx J_T \cdot \ddot{\theta} + m \cdot (L+R) \cdot \Omega^2 \cdot \varphi \qquad (3\text{-}2)$$

Wird der Pendelträger durch ein harmonisches äußeres Wechselmoment ν-ter Ordnung

$$M = \hat{M} \cdot \sin(\nu \cdot \Omega \cdot t)$$

angeregt, so erhält man für das Übertragungsverhalten des FKP aus den Gleichungen 3-1 und 3-2 den Zusammenhang:

$$\hat{M} = \left[J_T + \frac{m \cdot (L+R)^2}{1 - \frac{L}{R} \cdot \nu^2} \right] \cdot \nu^2 \cdot \Omega^2 \cdot \hat{\theta}$$

$$V_{FKP} = \left| \frac{\hat{\theta}(\nu)}{\hat{\theta}(0)} \right| = \left| \frac{(k+1)\left(1 - \frac{L}{R}\nu^2\right)}{1 + \left(1 - \frac{L}{R}\nu^2\right)k} \right| \qquad (3\text{-}3)$$

mit dem Massenträgheitsverhältnis:

$$k = \frac{J_T}{m \cdot (L+R)^2}$$

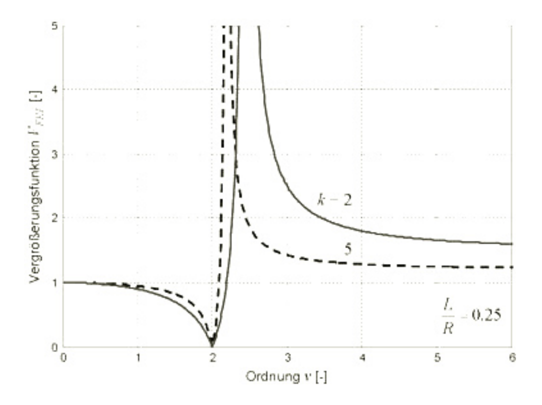


Bild 3-35: Prinzipverlauf der Vergrößerungsfunktion des Fliehkraftpendels

Aus Gleichung 3-3 lässt sich entnehmen, dass die Übertragungsfunktion bei der Ordnung

$$\nu = \sqrt{\frac{R}{L}}$$

eine Nullstelle besitzt. Damit ist das FKP prinzipbedingt sehr gut geeignet, eine dominante Ordnung über dem ganzen Drehzahlband zu tilgen. Das Fliehkraftpendel wirkt wie ein mechanisches Nachlauffilter. Die Vergrößerungsfunktion in **Bild 3-35** zeigt diese Filterwirkung. Aus dem Bild lässt sich auch entnehmen, dass nur ein exakt abgestimmtes FKP die gewünschte Wirkung besitzt. Insbesondere ein zu tief abgestimmtes Pendel kann auch zur unerwünschten Verstärkung von Ordnungen führen. Beim einfachen Pendel führen große Pendelausschläge aufgrund der kreisförmigen Pendelbahn zur Verstimmung des FKP's. Daher haben sich als Bauformen das nach Sarazin benannte Pendel mit bifilarer Aufhängung oder nach Salomon abrollende Pendelmassen auf vorgegebenen Bahnen bewährt (Kapitel 9.5.3).

3.4 Aktive Schwingungskompensation

3.4.1 Funktionsprinzip

Die ersten Ansätze zur aktiven Schwingungskompensation wurden zur Unterdrückung von unerwünschtem Luftschall unternommen (Kapitel 8.3.2). Heute wird das Prinzip auch für die Minderung von unerwünschtem Körperschall bzw. von mechanischen Schwingungen[1] erfolgreich eingesetzt.

Das Prinzip der aktiven Schwingungskompensation beruht auf der Interferenz eines unerwünschten Störsignals mit einem synthetisch erzeugten Kompensationssignal, welches geeignet ist, das Störsignal weitgehend zu eliminieren. Hinsichtlich der Generierung des Kompensationssignals kann man bei der aktiven Schwingungskompensation Steuerungs- und Regelungsansätze unterscheiden. Beim Steuerungsansatz (Feedforward-Struktur) wird die Hauptstörgröße z erfasst und daraus ein Kompensationssignal abgeleitet (Störgrößenaufschaltung). Das in **Bild 3-36** gestrichelt dargestellte Rückkopplungssignal dient nur zur adaptiven Einstellung der Filterparameter. Beim Regelungsansatz (Feedback-Struktur) wird das Kompensationssignal dagegen aus der rückgeführten Regelgröße y berechnet.

Der primäre Übertragungsweg von der Störquelle z zum Sensor y wird durch die Übertragungsfunktion H_P, der sekundäre Übertragungsweg vom Aktuator zum Sensor durch die Übertragungsfunktion H_S charakterisiert. Das Kompensationssignal wird mit der Filterfunktion F gefiltert und über den sekundären Übertragungsweg ebenfalls zum Sensor geleitet (**Bild 3-36**).

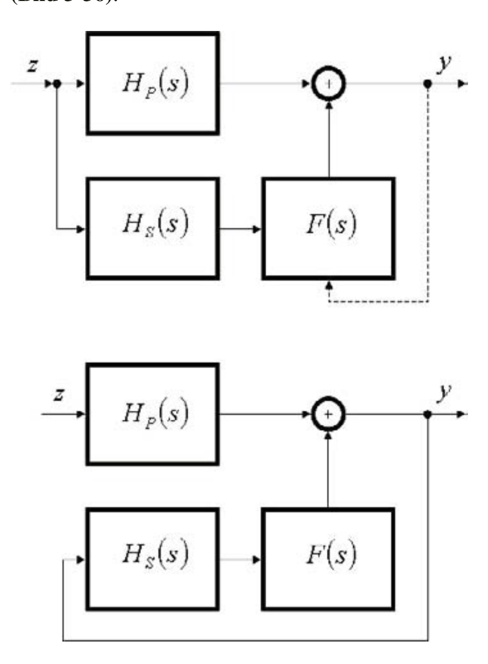


Bild 3-36: Signalfluss bei der aktiven Schwingungskompensation, Steuerungsansatz (oben) und Regelungsansatz (unten)

Beim Steuerungsansatz ergibt sich aus **Bild 3-36** das Sensorsignal y in Abhängigkeit vom Störsignal z zu:

$$y = H_P \cdot z + F \cdot H_S \cdot z = H_G \cdot z$$

mit

$$H_G = H_P + F \cdot H_S$$

Um zu erreichen, dass das Sensorsignal infolge des Störeinflusses vollständig kompensiert wird, muss somit gelten:

$$H_G = 0 \succ F = -\frac{H_P}{H_S}$$

Da die so gefundene optimale Filterfunktion prinzipiell nur dann realisierbar ist, wenn der Zählergrad des Polynoms der Übertragungsfunktion kleiner als der Nennergrad ist, muss auch die äquivalente Bedingung für die primäre und die sekundäre Übertragungsfunktion gelten. Andernfalls wäre das Kausalitätsprinzip für die Filterfunktion verletzt. Unter Be-

[1] In der Literatur auch Active Vibration Control (AVC) benannt

rücksichtigung dieser Randbedingung ist das Feedforward-Verfahren prinzipiell in der Lage, beliebige Störsignale zu eliminieren. Für die Unterdrückung von aperiodischen Störungen werden daher meist adaptive Steuerungen eingesetzt, bei denen die Filterkoeffizienten eines Finite-Impulse-Response (FIR) Filters mittels des Filtered-X Least-Mean-Squares-Algorithmus (FxLMS-Algorithmus) eingestellt werden [4]. Strukturen mit der Aufschaltung von gemessenen Störgrößen haben allerdings grundsätzlich den Nachteil, dass eine explizit messbare Störgröße z vorliegen muss, für deren Messung ein weiterer Sensor notwendig wird, was zusätzliche Kosten verursacht.

Besitzen die zu unterdrückenden Störsignale keine eindeutige Quelle, so fehlt auch ein geeignetes Referenzsignal um den Kompensationspfad zu implementieren. In diesem Fall ist eine Unterdrückung der Störung nur noch durch eine Regelung möglich, die auf der Rückkopplung des ursprünglichen Sensorsignals y basiert. Beim Regelungsansatz entfällt daher der Nachteil des zweiten Sensors, allerdings ergeben sich aus der Rückkopplungsstruktur dafür gewisse Regelungs- und Stabilitätsprobleme. Für das Sensorsignal gilt in diesem Fall:

$$y = H_P \cdot z + F \cdot H_S \cdot y$$

$$y = F_G \cdot z$$

mit

$$F_G = \frac{H_P}{1 - F \cdot H_S}$$

Das Störsignal wird somit nur kompensiert, wenn gilt:

$$F_G \to 0 \succ \left|1 - F \cdot H_S\right| \to \infty$$

Diese Bedingung für das optimale Filter ist naturgemäß nur näherungsweise erfüllbar, daher ist mit der Regelungsstruktur auch prinzipiell keine vollständige Auslöschung des Störsignals möglich.

Um durch Interferenz eine gute Dämpfung zu erzielen, muss das Kompensationssignal unabhängig von der Art des Ansatzes am Ort der Auslöschung hinsichtlich der Amplitude sehr genau mit dem Störsignal übereinstimmen und exakt 180° Phasenverschiebung aufweisen. Unter der Annahme sinusförmiger Signale ergibt sich bei einem relativen Amplitudenfehler ε bzw. einem Phasenfehler δ des Kompensationssignals folgende Dämpfung L des ursprünglichen Störsignals [7]:

$$L = -10 \lg\left[\varepsilon^2 + 4(1+\varepsilon)\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right]$$

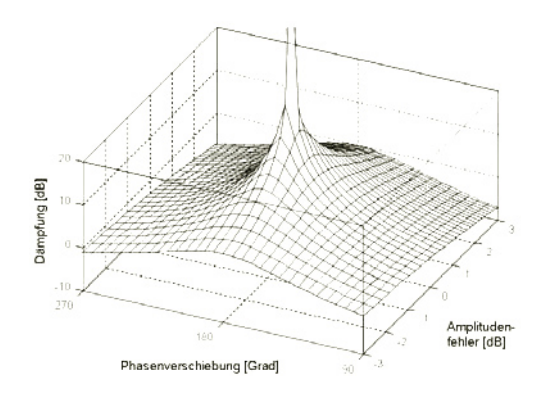


Bild 3-37: Dämpfung eines sinusförmigen Signals durch ein Kompensationssignal mit dem Amplitudenfehler ε und der Phasenverschiebung $180°+\delta$

Aus dem vorstehenden Zusammenhang geht beispielsweise hervor, dass bei 10 % Amplitudenfehler oder bei 6° Phasenfehler die Dämpfung nur noch ca. 20 dB beträgt. Als wesentliche Aufgabe der Signalverarbeitung eines Feedback-Systems gemäß **Bild 3-36** kann daher die Vorhersage des Störsignals über den Zeitraum der Laufzeit des Regelsignalpfades angesehen werden. Eine solche Vorhersage ist allerdings nur möglich, wenn das Störsignal eine signifikante zeitliche Kohärenz aufweist. Bei 90 % Kohärenz (γ^2 = 0,9) beträgt die mögliche Dämpfung beispielsweise nur noch 10 dB, während sie bei 99% Kohärenz noch 20 dB beträgt:

$$L = 10 \lg\left(1 - \gamma^2\right)$$

Ungeeignet ist das Feedback-Verfahren daher für Störungen mit einer schmalen Autokorrelationsfunktion wie beispielsweise weißes Rauschen, da hier das jeweils aktuelle Signal keine ausreichenden Informationen über den zukünftigen Signalverlauf beinhaltet. Der Einsatz von Feedback-Verfahren bleibt daher periodischen und tieffrequenten Störsignalen vorbehalten.

Für die Entwicklung geeigneter Filter existieren verschiedene regelungstechnische Ansätze, die unterschiedliche Komplexität aufweisen und jeweils für bestimmte Anwendungen geeignet sind. Ein einfaches Konzept stellt die Rückführung des Sensorsignals auf den Aktor mit Hilfe einfacher Regler dar. Hierzu zählt die aktive Dämpfung durch Geschwindigkeitsrückführung (Kapitel 3.4.2) oder die Beschleunigungsrückführung (Kapitel 3.4.3). Keines dieser Konzepte benötigt ein genaues Modell der Regelstrecke. Weitergehende Regelungsansätze sind jedoch im Allgemeinen eng mit dem Problem der Modellbildung und Systemidentifikation verknüpft, da die meisten dieser Regelungskonzepte ein Modell der Regelstrecke beinhalten. Adaptive Filter ermögli-

chen sogar die Systemidentifikation im laufenden Betrieb des Systems, um auf Veränderungen der Streckenparameter mit einer Anpassung des Modells reagieren zu können.

Im Automobil ist insbesondere die Körperschallanregung durch den Verbrennungsmotor von großer Bedeutung. Aufgrund der periodischen Energieumsetzung im Verbrennungsmotor weisen die anregenden Signale weitgehend periodischen Charakter auf. Zur Ausregelung dieser Signale sind daher Zustandsbeobachter auf der Basis eines Signalmodells, das die Periodizität der Anregung nachbildet, sehr gut geeignet [5].

Im Allgemeinen sind Strukturen, deren Vibrationen reduziert werden sollen, elastische kontinuierliche Systeme, wie beispielsweise die flächigen Karosseriestrukturen im Fahrzeug-Leichtbau. Für das Schwingungsverhalten solcher Strukturen lassen sich nur in Ausnahmefällen, wie dem der allseitig gelenkig gelagerten dünnen Platte (Kapitel 6.1.1), rein analytische Modelle finden. Charakteristisch für Leichtbaustrukturen ist eine Vielzahl schwach gedämpfter Schwingungsmoden, die sich durch Temperatureinflüsse oder wechselnde Belastungszustände auch noch stark verändern können. Bei Kenntnis der Eigenformen der Struktur, können modale Filter konstruiert werden, welche die unabhängige Regelung jedes Modes erlauben. Beispielsweise kann das Geschwindigkeitsfeld der Struktur durch eine gewichtete Summe der Strukturmoden formuliert werden, die auf *n* Moden begrenzt ist (modaler Abbruch). Hierbei wird jede Strukturmode mit einem frequenzabhängigen Partizipierungsfaktor gewichtet. Dieser Ansatz resultiert in einer signifikanten Reduktion der Freiheitsgrade, welche zur Formulierung der Bewegungsgleichungen notwendig sind. Dadurch wird es möglich, ein modales Regelungskonzept mit erträglichem Aufwand zu implementieren. Durch die aktive Regelung der Schwingungsamplituden der Strukturmoden gelingt es, das gemittelte Geschwindigkeitsquadrat der gesamten Struktur zu verringern (Kapitel 5.2.3). In diesem Zusammenhang ist es allerdings wichtig festzuhalten, dass eine Reduktion einzelner Strukturmoden noch nicht zwangsläufig auch eine Verringerung des emittierten Schalls nach sich zieht.

Hinsichtlich der Aktuatoren unterscheidet man zwischen aktiven Lagern, welche den Erreger aktiv von der Struktur isolieren und Trägheitsmassenaktuatoren (aktive Tilger), welche die schwingende Struktur durch aktive seismische Kompensationskräfte beruhigen.

3.4.2 Aktive Lagerung

Die Idee der aktiven Lagerung ist in **Bild 3-38** illustriert. Durch die elastische Anbindung des schwingenden Erregers erfolgt eine Krafttransmission in die Struktur des Fundaments. Wird nun die elastische Anbindung durch ein „aktives Lager" ersetzt bzw. ergänzt, so kann dadurch die Störeinleitung über das Lager kontrolliert und wahlweise entweder die transmittierte Kraft in das Fundament oder die Schwingungsamplitude des schwingungsfähigen Systems minimiert werden.

Im dargestellten Fall wird die statische Kraft weiterhin durch die Feder aufgebracht, die im überkritischen Frequenzbereich auch gute Isolation gewährleistet (Kapitel 3.3.2). Der Kraftaktor muss daher in erster Linie das ungünstige tieffrequente Verhalten positiv beeinflussen.

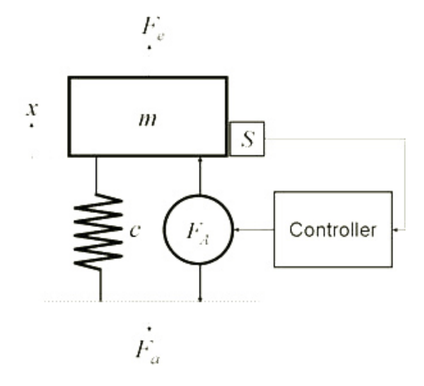


Bild 3-38: Aktives Lager, freigeschnitten zum Fundament

Für das Kräftegleichgewicht des aktiven Lagers nach **Bild 3-38** gilt:

$$F = F_m + F_a$$

$$F_m = s^2 \cdot m \cdot x$$

$$F_a = c \cdot x + F_A$$

In **Bild 3-39** ist der Signalfluss grafisch dargestellt. Die Masse *m* wird durch eine Restkraft beschleunigt,

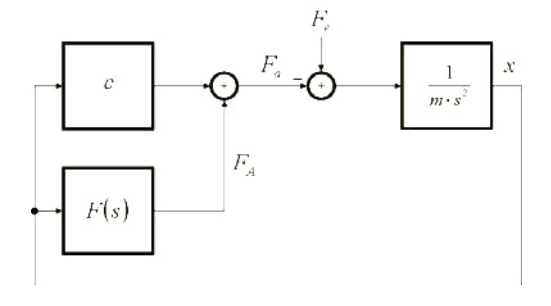


Bild 3-39: Signalflussbild des aktiven Lagers

welche sich aus der Differenz zwischen der anregenden Kraft F_e und der Summenkraft F_a aus der Federkraft und der Aktorkraft F_A ergibt. Der durch den Aktor gebildete Kompensationspfad liegt parallel zum Signalpfad der Feder. Dementsprechend muss die Aktorkraft gerade der Federkraft mit umgekehrtem Vorzeichen entsprechen, wenn die in das Fundament eingeleitete Kraft F_a zu Null werden soll. Der Aktor soll daher abhängig von der Lageinformation des Sensors derart angesteuert werden, dass sowohl die Federkraft zumindest teilweise kompensiert, als auch eine zusätzliche Dämpfungskraft aufgebracht wird:

$$F_A = (d \cdot s - k \cdot c) \cdot x = F(s) \cdot x$$

Damit folgt für die Übertragungsfunktion:

$$\frac{F_a}{F_e} = \frac{d \cdot s + c \cdot (1-k)}{m \cdot s^2 + d \cdot s + c \cdot (1-k)}$$

und damit für die Vergrößerungsfunktion:

$$\left|\frac{F_a}{F_e}\right| = V_2\left(\frac{\eta}{\sqrt{1-k}}, D\right)$$

Wie vorstehende Gleichungen zeigen, entspricht die Kompensation der Federkraft durch die zum Schwingweg proportionale Komponente der Aktorkraft einer elektronisch gesteuerten Absenkung der dynamischen Steifigkeit und damit auch einer entsprechenden Absenkung der Resonanzfrequenz. Die geschwindigkeitsproportionale Komponente der Aktorkraft wirkt äquivalent zu einem mechanischen Dämpfer und reduziert damit den Dämmungseinbruch im Resonanzbereich **(Bild 3-40)**. Nachteilig ist allerdings die damit verbundene Abflachung des Dämmungsverlaufs oberhalb der Resonanz. Dieser Nachteil kann vermieden werden, wenn der virtuelle Dämpfer in Analogie zu Kapitel 3.3.3 mit der Nachgiebigkeit n_d elastisch angebunden wird (Lead Filter). Für die Filterfunktion ergibt sich in diesem Fall:

$$F(s) = \left(n_d + \frac{1}{d \cdot s}\right)^{-1} - k \cdot c$$

Aktive Lager sind schon heute z.B. bei der Lagerung schwingungsempfindlicher Komponenten sowie bei der Aggregatelagerung im Schiffsbau häufig eingesetzt. Im Automobilbau wird mit aktiven Aggregatelagern experimentiert, um motorerregte Strukturschwingungen in der Karosserie zu unterdrücken. Zur Bedämpfung von fahrbahnerregten Karosserieschwingungen werden aktive Fahrwerkslager und aktive Zugstreben sowohl mit Piezoaktuatoren als auch mit hydraulischen Aktuatoren untersucht (Kapitel 4.4.3). Auch die aktive Bedämpfung von Blechfeldschwingungen durch piezoelektrische Polymere

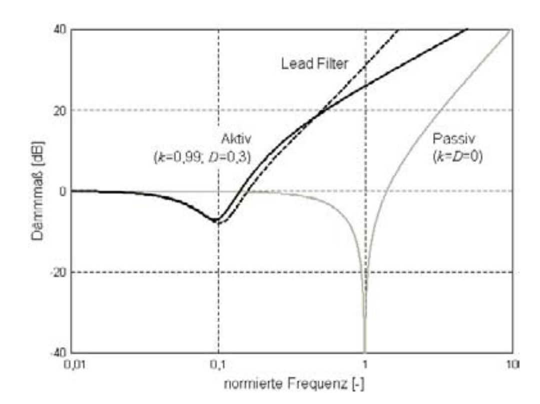


Bild 3-40: Dämmmaß einer aktiven Lagerung ohne und mit Lead-Filter, im Vergleich zur passiven Lagerung

ist Gegenstand der Betrachtungen. Dadurch könnte u.U. erhebliches Zusatzgewicht durch passive Maßnahmen eingespart werden. Bis zur Serienreife im Fahrzeugbau ist bisher jedoch noch keines dieser Konzepte gediehen.

3.4.3 Trägheitsmassenaktuator

Der Trägheitsmassenaktor ist eine Erweiterung des seit langem im Maschinenbau erfolgreich angewendeten passiven Tilgerkonzeptes (Kapitel 3.3.6). Es geht bekanntlich davon aus, mit Hilfe einer elastisch angekoppelten Zusatzmasse („Tilgermasse“) resonanzbedingte Strukturschwingungen in einer schwingungsfähigen mechanischen Konstruktion zu kompensieren. Dieses nur für diskrete Eigenschwingungen wirksame Prinzip läßt sich auch für ein breitbandigeres Spektrum von Störungen anwenden, wenn die Ankoppelfeder des Tilgers um ein parallel angeordnetes, aktiv geregeltes Kraftstellglied ergänzt wird **(Bild 3-41)**. Damit werden seismische Massenkräfte F_A mit dem Ziel erzeugt, die in die Struktur eingeleiteten dynamischen Kräfte zu kompensieren und so die Struktur an definierten Komfortpunkten zu beruhigen. Dazu wird die Tilgermasse durch einen Aktuator beschleunigt, der über einen Sensor S auf der schwingenden Struktur angesteuert wird.

Für das Schwingsystem gelten die in Kapitel 3.3.6 abgeleiteten Beziehungen für den passiven Tilger mit der Ergänzung um den Beitrag der Aktorkraft F_A:

$$F_e = F_m + F_a + F_T$$

$$F_m = s^2 \cdot m \cdot x$$

$$F_a = (s \cdot d + c) \cdot x$$

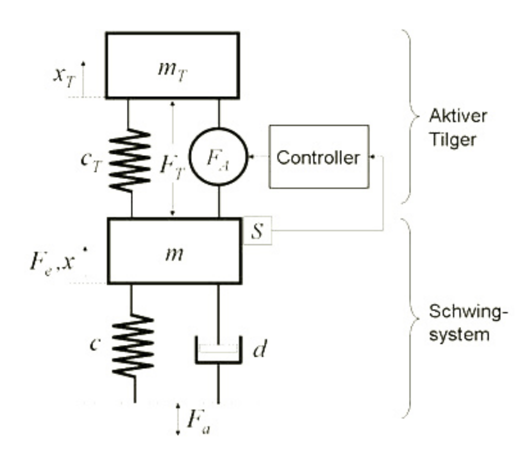


Bild 3-41: Aktive Tilgung mit Trägheitsmassenaktor

$$F_T = \frac{s^2 \cdot m_T \cdot (s \cdot d_T + c_T)}{s^2 \cdot m_T + s \cdot d_T + c_T} \cdot x + \frac{s^2 \cdot m_T}{s^2 \cdot m_T + s \cdot d_T + c_T} F_A$$

D.h. die Reaktionskraft F_T des Tilgers auf die Struktur setzt sich nun aus zwei Komponenten zusammen. Der erste Summand beschreibt den bereits bekannten Anteil der Reaktionskraft des passiven Tilgers auf die Schwingbewegung (Kapitel 3.3.6), der zweite Summand gibt den Anteil infolge der Aktorkraft wieder. Da diese über den Sensor *S* ebenfalls in Abhängigkeit vom Schwingweg der Struktur angesteuert wird, kann man auch schreiben:

$$F_A = F(s) \cdot x$$

Damit ergibt sich für das Gesamtsystem ein Signalfluss gemäß **Bild 3-42**. Die Masse *m* wird durch eine Restkraft beschleunigt, welche sich aus der Differenz zwischen der anregenden Kraft F_e und der Summe aus der Feder-Dämpfer-Kraft F_a und der Tilgerkraft F_T

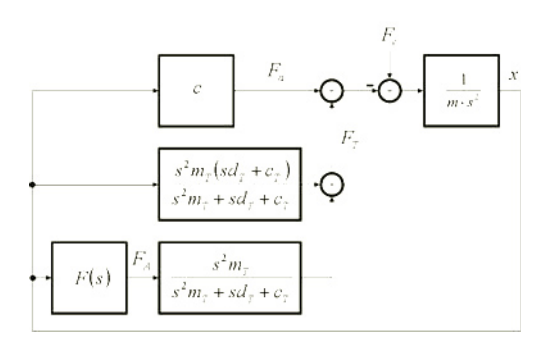


Bild 3-42: Signalfluss der aktiven Schwingungskompensation mit Trägheitsmassenaktor

ergibt. Der Aktor bildet dabei einen zweiten Kompensationspfad, der parallel zu dem Signalpfad liegt, welcher die passive Tilgungswirkung beschreibt. Im Gegensatz zum aktiven Lager wird beim aktiven Tilger die Filterfunktion dahingehend gewählt, dass nicht die eingeleitete Tilgerkraft F_a sondern die Schwingungsamplitude minimal wird.

In **Bild 3-43** ist die Verstärkung der Aktorkraft auf ihrem Signalpfad dargestellt. Daraus wird deutlich, dass unterhalb der Resonanz offensichtlich keine nennenswerten Aktorkräfte übertragen werden können, während oberhalb der Resonanz die Aktorkraft praktisch unverändert weitergeleitet wird. Daher kann der Trägheitsmassenaktor in erster Linie dazu dienen, den wirksamen Frequenzbereich des passiven Tilgers zu höheren Frequenzen hin zu erweitern und damit eine breitbandigere Kompensationswirkung zu gewährleisten.

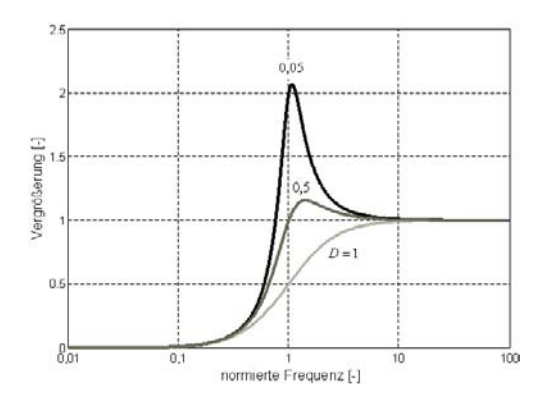


Bild 3-43: Vergrößerung der Aktorkraft

Setzt man für den Trägheitsmassenaktor beispielsweise eine Aktorkraft an, die zur Schwingbeschleunigung der Masse *m* proportional ist, aber in entgegengesetzter Richtung wirkt, so gilt für die Filterfunktion die Form:

$$F(s) = -m_A \cdot s^2$$

Damit ergibt sich analog zu Kapitel 3.3.6 für den Maximalwert der Vergrößerungsfunktion V_m ein Verlauf wie in **Bild 3-44** dargestellt. Wie zu erwarten, bewirkt die zusätzliche Kraftwirkung des Trägheitsmassenaktors nur oberhalb der Abstimmfrequenz des Tilgers eine signifikante Reduktion der Schwingungsamplituden.

Entscheidend für die Wirksamkeit des Trägheitsmassenaktors ist die Leistungsfähigkeit der eingesetzten Kraftglieder. Es werden sowohl elektrodynamische als auch elektromagnetische Konzepte verfolgt, wobei die letzteren eine wesentlich größere Kraftausbeute ermöglichen. Gegenüber den aktiven Lagern

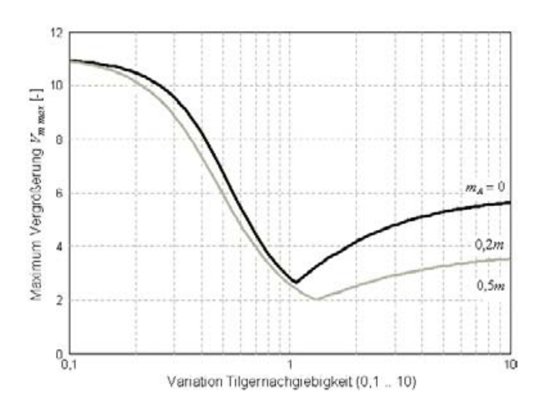


Bild 3-44: Maximalwert der Vergrößerungsfunktion des Trägheitsmassenaktors im Vergleich zum passiven Tilger bei Variation der Tilgerabstimmung

besitzt der Trägheitsmassenaktor den zusätzlichen Vorteil, dass er relativ frei zu positionieren ist. Damit kann auf die Gegebenheiten des Bauraums besser eingegangen werden. Aktive Tilger sind allerdings derzeit eher noch Gegenstand der Forschung und bisher nur in einigen prototypischen Anwendungen, z.B. zur Kompensation von motorinduziertem Körperschall, umgesetzt. Hier wurde das Potential zur breitbandigen Verringerung des körperschallinduzierten Schalldrucks allerdings erfolgreich nachgewiesen [5].

3.5 Subjektives Schwingungsempfinden

Das Studium des subjektiven Schwingungsempfindens ist ein Teilgebiet der Psychophysik. Diese bezieht sich ganz allgemein auf die gesetzmäßigen Wechselbeziehungen zwischen subjektivem psychischen (mentalen) Erleben und quantitativ messbaren, also objektiven physikalischen Reizen als den auslösenden Prozessen. Im Fall von mechanische Schwingungen, die auf den menschlichen Körper übertragen werden, kann es neben einer Störung des allgemeinen Wohlbefindens bei hohen Amplituden und längerer zeitlicher Einwirkung auch zu gesundheitlichen Beeinträchtigungen kommen. Die Empfindlichkeit eines Menschen auf Schwingungseinwirkung ist empirisch durch Reihenuntersuchungen gut abgesichert. Bereits im Jahr 1963 wurde mit der Richtlinie VDI 2057 ein Verfahren festgelegt, mit dem die Belastung des Menschen durch Schwingungseinwirkung bestimmt werden konnte. Diese Richtlinie wurde mehrfach überarbeitet und in der Neufassung 1987 veröffentlicht. 1974 wurde zu diesem Thema erstmals die internationale Norm ISO 2631 verabschiedet. Mittlerweile sind auf der Basis der internationalen Diskussion und neuer Erkenntnisse die Inhalte der Richtlinie erneut überarbeitet worden. Die aktuelle Fassung der Richtlinie VDI 2057 wurde 2002 verabschiedet. Dabei werden Ganzkörperschwingungen in Blatt 1 und Hand-Arm-Schwingungen in Blatt 2 behandelt [17].

Im Automobilbereich sind insbesondere die über den Sitz eingeleiteten Ganzkörperschwingungen von Bedeutung. Dabei handelt es sich um mechanische Schwingungen im Frequenzbereich von 0,1 Hz bis 80 Hz, die beim sitzenden Menschen über Gesäß, Füße und Rücken auf den gesamten Körper einwirken. Die typischen Schwingungsamplituden in modernen Personenkraftwagen sind relativ niedrig, die feststellbaren Wirkungen der Schwingbelastung beziehen sich daher überwiegend auf Störungen des Wohlbefindens und Verminderung des Konzentrationsvermögens. Gesundheitliche Beeinträchtigungen sind dagegen nicht zu erwarten. Diese können jedoch bei lang andauernden und stärkeren Schwingungsbelastungen, wie sie bei selbst fahrenden Arbeitsmaschinen oft vorliegen, ebenfalls nicht ausgeschlossen werden.

Der wesentliche Unterschied der neuen Richtlinie zur bisherigen Fassung liegt darin, dass das Konzept der bewerteten Schwingstärke (K-Faktor) zugunsten einer detaillierten frequenzbewerteten Schwingbeschleunigung modifiziert wurde. Die Frequenzbewertung dient dazu, die auf den Menschen einwirkenden mechanischen Schwingungen entsprechend der frequenzabhängigen biomechanischen Beanspruchung und der damit verbundenen subjektiven Wirkung auf den Menschen zu gewichten. Dazu sind in der Richtlinie auf Terz-Frequenzbänder bezogene Gewichtungsfaktoren angegeben (**Bild 3-45**). Die Zahlenwerte der Gewichtungsfaktoren sind unterschiedlich, je nach Beanspruchungskriterium und der Art der Schwingungsbeaufschlagung (**Tabelle 3-3**):

Körperhaltung	**Kontaktfläche**	**Schwingrichtung**	**Frequenzbewertung**
Sitzen	Sitzfläche	z	W_k
		x,y	W_d
	Fußauflage	x,y,z	W_k
	Rücken	x	W_c

Tabelle 3-3: Frequenzbewertungskurven für das Beanspruchungskriterium Wohlbefinden

Die frequenzbewertete Beschleunigung errechnet sich aus der gemessenen bandpassbegrenzten Schwingbeschleunigung a_i an der Einleitungsstelle und dem Frequenz-Bewertungsfaktor W_i für alle m Terz-Frequenzbänder:

$$a_{wi} = a_i \cdot W_i$$

$$a_w = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_{wi}^2}$$

Bezieht man die bewertete Schwingbeschleunigung auf den Bezugswert

$$a_0 = 10^{-6} \ \frac{m}{s^2}$$

so erhält man den zur Schwingbeschleunigung äquivalenten bewerteten Beschleunigungspegel in dB:

$$L_w = 20 \cdot \lg \frac{a_w}{a_0}$$

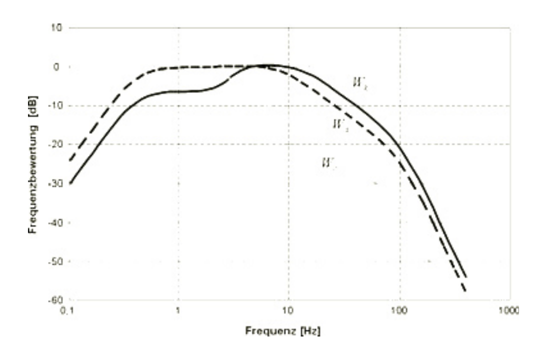


Bild 3-45: Wichtigste Frequenzbewertungskurven für den sitzenden Menschen, nach VDI 2057, Blatt 1

In **Bild 3-46** sind im Vergleich dazu die Frequenz-Bewertungskurven nach VDI 2057 alt von 1987 dargestellt. Im Bereich bis 4 Hz steigt die alte Bewertungsfunktion mit der Wurzel aus der Frequenz an, während sie im Bereich 4 bis 8 Hz einen konstanten Maximalwert besitzt. Im Bereich oberhalb von 8 Hz fällt sie wieder umgekehrt proportional zur Frequenz ab. Gewichtet man die Schwingbeschleunigung bei jeder Frequenz mit dem Bewertungsfaktor b der Bewertungsfunktion, so erhält man die bewertete Schwingstärke in Form des so genannten K-Wertes:

$$K = a_z \cdot b \ ;$$

$$b = \begin{cases} 10 \cdot \sqrt{f} & f < 4 \ \ Hz \\ 20 & 4 \ \ Hz < f < 8 \ \ Hz \\ 160/f & f > 8 \ \ Hz \end{cases}$$

Aus den Kurven gleicher bewerteter Schwingstärke kann gefolgert werden, dass die Empfindlichkeit des Menschen bzgl. Schwingungsanregungen im Frequenzbereich zwischen 4 und ca. 10 Hz am größten ist. Diese Empfindlichkeit resultiert aus der Tatsache, dass der Mensch im technischen Sinn ein Schwingungssystem darstellt, dessen einzelne Bestandteile, wie z.B. Kopf, Gliedmaßen, Magen, usw. in diesem Frequenzbereich zu Resonanzschwingungen angeregt werden. Im Frequenzbereich darüber und darunter nimmt die Empfindlichkeit auf Schwingungsanregung kontinuierlich ab. Relevante Störungen durch

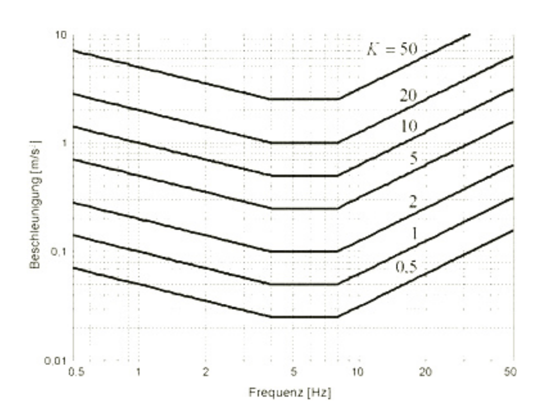


Bild 3-46: Kurven gleicher bewerteter Schwingstärke in z-Richtung nach VDI 2057 alt

Schwingungseinwirkung treten im Kraftfahrzeug daher in der Regel nur zwischen ca. 1Hz (Aufbauschwingungen) und 50Hz (Kribbeln) auf.

Für Frequenzen über 8 Hz gilt gemäß vorstehender Bewertungsfunktion:

$$K = a_z \cdot \frac{160}{f} = v_z \cdot 320 \cdot \pi$$

Dies bedeutet, dass für Frequenzen zwischen 4 und 8 Hz eine konstante Schwingbeschleunigung gleichbedeutend mit einem näherungsweise konstanten Schwingungsempfinden ist, während oberhalb von 8 Hz eine konstante Schwinggeschwindigkeit ein näherungsweise gleich bleibendes Schwingungsempfinden hervorruft.

In **Bild 3-47** ist die alte und die neue Frequenzbewertung in einem Diagramm gegenübergestellt. Daraus geht hervor, dass die alte Bewertungsfunktion b als grobe Näherung für die neue Frequenzbewertung W_k angesehen werden kann. Daher kann es durchaus sinnvoll sein, diese einfache Bewertungsfunktion auch weiterhin für überschlagsmäßige Betrachtungen heranzuziehen.

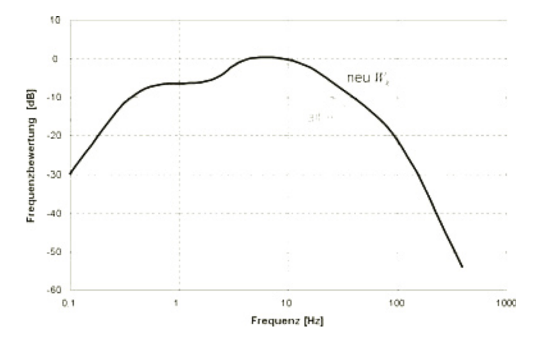


Bild 3-47: Frequenzbewertungskurven nach VDI 2057 alt und neu im Vergleich

Der Effektivwert einer zeitveränderlichen frequenzbewerteten Beschleunigung ist der energieäquivalente quadratische Mittelwert:

$$a_{wT} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T a_w^2(t)dt}$$

In der Praxis ist es meist sinnvoller, eine gleitende Mittelung nach folgender Gleichung zu verwenden:

$$a_{w\tau}(t) = \sqrt{\frac{1}{\tau}\int_0^t a_w^2(\xi)\exp\left[\frac{\xi - t}{\tau}\right]d\xi}$$

Der nach obiger Formel definierte Effektivwert ist zu jedem Zeitpunkt durch alle zurückliegenden Signalanteile mit zeitlich exponentiell abklingender Gewichtung bestimmt. Er ist seinerseits wieder eine Zeitfunktion. Für die Integrationszeitkonstante wird in der Norm [1] abhängig von der zeitlichen Signaldynamik entweder $\tau = 1\ s$ (slow) oder $\tau = 0{,}125\ s$ (fast) empfohlen.

In vielen Fällen treten Schwingungsbelastungen in alle drei Raumrichtungen gleichzeitig auf. Es empfiehlt sich, daraus einen Gesamtwert der Schwingungsbelastung wie folgt zu bilden:

$$a_w = \sqrt{a_{wx}^2 + a_{wy}^2 + a_{wz}^2}$$

Die durch die Schwingungseinwirkung auf den Menschen hervorgerufene Empfindung reicht von der Wahrnehmbarkeitsschwelle, unterhalb der eine Wahrnehmung der Schwingung nicht mehr möglich ist, bis zur Schmerzgrenze, oberhalb der die Empfindung in Schmerz übergeht. **Tabelle 3-4** liefert Anhaltswerte für die subjektive Empfindung durchschnittlicher Probanden. Danach beträgt z.B. die Perzeptionsschwelle für den bewerteten Schwingpegel 0,015 m/s² oder 83,5 dB. Die subjektive Empfindlichkeit zwischen verschiedenen Probanden ist allerdings individuell sehr unterschiedlich. Die gerade noch wahrnehmbare Vibrationspegel-Unterschiedsschwelle beträgt ca. 1.6 dB [6].

Kriterium	**Subjektive Wahrnehmung**	a_{wT} [m/s²]
Wahrnehmbarkeit	Nicht spürbar	<0,01
	Perzeptionsschwelle	0,015
Wohlbefinden	Gerade spürbar	<0,02
	Gut spürbar	>0,02
Gesundheit	Stark spürbar	>0,08
	Sehr stark spürbar	>0,315

Tabelle 3-4: Zusammenhang zwischen der bewerteten Schwingbeschleunigung und der subjektiven Wahrnehmung [17]

Zur Prüfung der Schwingungsübertragung vom Sitz auf die auf dem Sitz befindliche Person wurden in der Norm ISO 10362 grundlegende Anforderungen bezüglich Messung und Analyse festgelegt. Es zeigt sich jedoch, dass die Körperhaltung der Versuchspersonen sowie deren Muskeltonus (entspannte oder straffe Muskulatur) einerseits, als auch die Streubreite zwischen unterschiedlichen Versuchspersonen andererseits, großen Einfluss auf die Messergebnisse haben. Zur Vermeidung dieser Nachteile wurden in den letzten Jahren verschiedene mechanische Menschmodelle (Schwingungsdummy) entwickelt, welche die dynamischen Eigenschaften des Menschen bezüglich Schwingungsübertragung nachbilden sollen (Kapitel 4.1.6).

Literatur

[1] VDI-Richtlinien 2057: Einwirkungen mechanischer Schwingungen auf den Menschen, Blatt 1 und 2, Beuth Verlag Berlin, 2002

[2] VDI 3833: Schwingungsdämpfer und Schwingungstilger, Blatt 1 und Blatt 2

[3] Schick, W.: Wirkung und Abstimmung von Fliehkraftpendeln am Mehrzylindermotor, Ingenieur-Archiv, 1939

[4] Widrow, B. und S. Stearns: Adaptive Signal Processing. Prentice-Hall, Inc., London, 1985

[5] Bohn, C.; Karkosch, H. J.; Svaricek, F.: Zustandsbeobachter für periodische Signale: Anwendung zur aktiven Kompensation von motorerregten Karosserieschwingungen; automatisierungstechnik, 11/2005

[6] Bellmann, M. A.; Mellert V.; Reckhardt C. und Remmers H.: Experimente zur Wahrnehmung von Vibrationen, DAGA 2000 Fortschritte der Akustik, 2000

[7] Mangiante, G.: Active sound absorption. J. Acoust. Soc. of Am. 61 (1977), p. 1516–1523

[8] Holzweißig, F.: Maschinendynamik – Schwingungslehre, Springer Verlag Berlin, 5. Auflage 2004

[9] VDI-Richtlinien 3833: Schwingungsdämpfer und Schwingungstilger, Blatt 1 und 2, Beuth Verlag Berlin, 2006

[10] Burkhardt, C.; Balmer, B.: Entkoppelelemente in der Fahrzeugtechnik, Die Bibliothek der Technik, Band 237, Verlag Moderne Industrie